

Metodi matematici applicati alla Chimica

LM in Chimica (F5Y) , prof. M.Vignati , prova scritta del 15.6.2016

1] (8 punti) i) Determinare tutte le soluzioni di

$$(*) \quad y'' - 4y' + 5y = 0$$

ii) Quali tra queste soddisfano anche la condizione $y(\pi/2) = 0$?

iii) Stabilire per quali valori $t_0 > \frac{\pi}{2}$ esistono soluzioni non identicamente nulle di (*) che soddisfano contemporaneamente le due condizioni $y(\pi/2) = 0$ e $y(t_0) = 0$.

2] (7 punti) Calcolare il valore di $\iint_E f(x, y) \, dx dy$, dove $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ e

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

3] (8 punti) Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{xz^2}{(x^2 + y^2)^2}; \frac{yz^2}{(x^2 + y^2)^2}; \frac{-z}{x^2 + y^2} \right)$$

lungo l'arco elicoidale di equazione parametrica

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \quad t : 0 \mapsto 4\pi$$

Suggerimento: può essere utile ricordare che l'integrale di linea di un campo irrotazionale è un invariante omotopico.

4] (7 punti) Sia

$$F(x, y, z) = 2x^2y + \ln(x + 1) + 2 - e^{x+y}$$

e sia y_0 la soluzione di $F(x, y) = 0$.

i) Verificare che, localmente in $(0, y_0)$, l'insieme Z in cui F si annulla può essere descritto come grafico di una funzione $y = \varphi(x)$.

ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di φ nel punto $(0, y_0)$.