Metodi matematici applicati alla Chimica

LM in Chimica (F5Y) prof. M.Vignati 15.2.2017

1] Determinare, separatamente per i tre casi seguenti, quante e quali sono le soluzioni della equazione differenziale

$$y'' + 4\pi^2 y = 0$$

che soddisfano

$$\textbf{a)} \begin{cases} y\,(1/3) = 0 \\ y'\,(1/3) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \textbf{b)} \begin{cases} y\,(1/3) = 0 \\ y\,(5/6) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \textbf{c)} \begin{cases} y\,(1/3) = 0 \\ y\,(3/4) = 0 \end{cases}$$

2] i) Determinare la soluzione locale $y = g\,(t)$ del problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y' = 2\,(1-t)\,\sqrt{y} \\ y\,(1) = 4 \end{cases}$$

ii) Individuare il più ampio intervallo I, contenente $t_0 = 1$, in cui g risolve $(*)$.

iii) (Facoltativo): osservare che è possibile prolungare g al di fuori di I in modo da ottenere una soluzione di classe $\mathcal{C}^1\,(\mathbb{R})$ di $(*)$; discutere l'unicità di tale prolungamento.

3] Per $R > 0$, sia E_R la "cupola parabolica" $E_R = \left\{(x, y, z) : 0 < z < 1 - \dfrac{x^2 + y^2}{R^2}\right\}$.

i) Calcolare $V\,(R) = vol\,(E_R)$.

ii) Calcolare la misura superficiale della frontiera di E_R, $\sigma\,(R) := area\,(\partial E_R)$.

iii) Verificare che esiste, ed è finito, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \frac{\sigma\,(R)}{V\,(R)} =: L$.

4] Per $0 < H < R$ sia $E = \left\{(x, y, z) : H \le z;\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\right\}$, e sia $\mathbf{n}$ il versore normale esterno su ∂E.
Calcolare il flusso $\iint_{\partial E} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$ del campo $\mathbf{F}$ uscente da E, dove

$$\mathbf{F}\,(x, y, z) := \frac{(x\,;\,y\,;\,z)}{\|(x, y, z)\|^3}$$