LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica**

19.1.2018 prof. M.Vignati **prova scritta n.1**

**1] i)** Verificare che la funzione $f(x,y) := 3y^2 + \ln^2(1+x) + 2y\ln(1+x)$ ammette l'origine come unico punto stazionario.

**ii)** Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(0,0,0)$.

**iii)** Scrivere il polinomio di Taylor del $II$ ordine di $f$ in $(0,0)$.

**iv)** Determinare la natura di $(0,0)$ (max, min, sella?).

---

**2]** Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y}{3}[3e^{xy} - 2]\,;\ \frac{2y}{3} + xe^{xy}\right)$$

lungo la frontiera, percorsa in senso anti-orario, della regione

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le \pi\,;\ y \ge 0\right\}.$$

---

**3] i)** Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$(*_H) \qquad y'' + y' - 2y = 0$$

**ii)** Determinare la soluzione generale di

$$(*) \qquad y'' + y' - 2y = 4e^{-3t}$$

**iii)** Determinare la soluzione $y_\alpha$ del problema di Cauchy

$$(PC_\alpha) \qquad \begin{cases} y'' + y' - 2y = 4e^{-3t} \\ y(0) = \alpha;\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**iv)** Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione $y_\alpha$ di $(PC_\alpha)$ ammette limite finito per $t \to +\infty$?

---

**4]** Per $0 < R < H$, calcolare il volume della regione

$$D_{R,H} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le H - \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

---

**5]** Sia $f(x,y) := y\sqrt{x}$, e sia

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x\sqrt{3}\,;\ x^2+y^2 \le 1\right\}$$

Calcolare $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$.