LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica**

13 settembre 2019 | **prova scritta #6** | prof. M.Vignati

1] Determinare la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(2t+3)y}{2(t+1)} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e individuarne l'intervallo massimale di definizione.

2] Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito come

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(1 + 4x + y^2 - xy^2\,;\, 3 - x + ye^x\right)$$

lungo la frontiera della regione

$$D = \left\{(x, y) : x \in [0, 3], |y| \leq 3 + 2x - x^2\right\}$$

percorsa in senso antiorario.

3] Sia $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$U(x, y, z) = x + y + z - x\left(x^2 - z^2 - 2y^2\right)$$

i) Sia $\Sigma^+ = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\right\}$, orientata in modo che il versore normale ν sia "diretto verso l'alto" (cioè $\nu_3 \geq 0$).

Calcolare il flusso $\iint\limits_{\Sigma^+} \nabla U \cdot \nu \, d\sigma$ del campo vettoriale $\nabla \mathbf{U}$ attraverso Σ^+.

ii) In modo analogo, sia $\Gamma^+ = \left\{(x, y, z) : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; z \geq 0\right\}$ orientata in modo che il versore normale η sia "diretto verso l'alto" (cioè $\eta_3 \geq 0$).

Calcolare il flusso $\iint\limits_{\Gamma^+} \nabla U \cdot \eta \, d\sigma$ del campo vettoriale $\nabla \mathbf{U}$ attraverso Γ^+.

Suggerimento: può essere utile osservare, motivandolo, che i due flussi coincidono.

4] L'integrale doppio di ogni funzione continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, relativamente alla regione piana E, può essere calcolato come

$$\iint_E f = \int_{-1}^{0} \left(\int_{\sqrt{-y}}^{1} f(x, y)\, dx \right) dy \; + \int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Descrivere come si può calcolare $\iint_E f$ invertendo l'ordine di integrazione.