Cognome..**Nome**................................**Matr**....................

LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - prof. M.Vignati

10.11.2017 I prova in itinere versione a

1a] La funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è differenziabile in (x_0,y_0), e le sue derivate direzionali lungo i versori $\mathbf{u}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$ e $\mathbf{v}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ valgono

$$D_{\mathbf{u}}f\left(x_0,y_0\right)=2\sqrt{3}\quad \text{e} \quad D_{\mathbf{v}}f\left(x_0,y_0\right)=-4\ .$$

i) Calcolare $\nabla f\left(x_0,y_0\right)$

ii) Calcolare $D_{\mathbf{w}}f\left(x_0,y_0\right)$, dove $\mathbf{w}=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$.

2a] Un filo viene disposto nel piano xy seguendo il profilo della curva $\{y=\sin x\}$, con punti estremi $(0,0)$ e $(2\pi,0)$. La densità lineare di massa è

$$\delta\left(x,y\right)=\frac{x}{\sqrt{2-y^2}}$$

Calcolarne la massa totale.

3a] Individuare, e classificare, i punti stazionari della funzione

$$f\left(x,y\right)=4x-2x^2y+xy^2-2y$$

4a] Per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ il punto $(x,y,z)=(0,0,0)$ è di minimo relativo per la funzione

$$f\left(x,y,z\right)=\alpha x^2+2y^2+3z^2+2\alpha yz+2\sqrt{\alpha}xy+xyz\ \ ?$$

5a] Siano $\mathbf{p} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ed $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definite da

$$\mathbf{p}(t) = \big(2\cos t\, ;\, 2\sin t\, ;\, t^2 - \pi t\big) \quad , \quad f(x, y, z) = xy + e^z$$

e sia $h(t) = (f \circ \mathbf{p})(t) = f(\mathbf{p}(t))$.

Calcolare $h'(t_0)$, sapendo che $\mathbf{p}'(t_0)$ è parallelo al piano $\{z = 0\}$.

6a] Sia $F(x, y) = e^{3x(y-2)} - \sqrt{4 - 3x - y}$.

i) Determinare la soluzione x_0 di $F(x, 2) = 0$.

ii) Verificare che l'insieme $Z(F) = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ è rappresentabile, in un intorno di $(x_0, 2)$, come grafico di un'opportuna funzione $y = g(x)$.

iii) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(x_0, 2)$.

7a] Determinare i valori massimo e minimo assoluti assunti da

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y$$

sull'insieme $E = \big\{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 4\big\}$.

Cognome.......................................**Nome**...............................**Matr**...................

LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - prof. M.Vignati

10.11.2017 I prova in itinere versione b

1b] Siano $\mathbf{p} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ed $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definite da

$$\mathbf{p}(t) = \left(2\cos t\,;\, 2\sin t\,;\, t^2 - \pi t\right) \quad , \quad f(x, y, z) = xy + e^z$$

e sia $h(t) = (f \circ \mathbf{p})(t) = f(\mathbf{p}(t))$. Calcolare $h'(t_0)$, sapendo che $\mathbf{p}'(t_0)$ è parallelo al piano $\{z = 0\}$.

2b] Individuare, e classificare, i punti stazionari della funzione

$$g(x, y) = 2x^2y + 4x + xy^2 + 2y$$

3b] La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in (x_0, y_0), e le sue derivate direzionali lungo i versori $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ e $\mathbf{v} = \left(\frac{-1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ valgono

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = -\sqrt{3} \quad \text{e} \quad D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = 4\,.$$

i) Calcolare $\nabla f(x_0, y_0)$

ii) Calcolare $D_{\mathbf{w}} f(x_0, y_0)$, dove $\mathbf{w} = \left(\frac{-1}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

4b] Un filo viene disposto nel piano xy seguendo il profilo della curva $\{y = 1 + \cos x\}$, con punti estremi $(0, 2)$ e $(\pi, 0)$. La densità lineare di massa è

$$\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2y - y^2}}$$

Calcolarne la massa totale.

5b] Determinare i valori massimo e minimo assoluti assunti da

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y$$

sull'insieme $E = \left\{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 4\right\}$.

6b] Per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ il punto $(x,y,z) = (0,0,0)$ è di minimo relativo per la funzione

$$f(x,y,z) = \beta z^2 + 2(x^2+y^2) + 2\beta xy + 2\sqrt{\beta} yz + xyz \ \ ?$$

7b] Sia $F(x,y) = e^{3x(y-1)} - \sqrt{1+3x+y}$.

i) Determinare la soluzione x_0 di $F(x,1) = 0$.

ii) Verificare che l'insieme $Z(F) = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ è rappresentabile, in un intorno di $(x_0, 1)$, come grafico di un'opportuna funzione $y = g(x)$.

iii) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(x_0, 1)$.