Cognome......................................**Nome**...............................**Matr**...................

LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - prof. M.Vignati

27 nov 2019 I prova in itinere versione a

1a] Calcolare la lunghezza del sostegno γ della curva piana descritta, in coordinate polari, da:

$$\{\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}],\ \rho(\vartheta) = 2\sqrt{2}(\cos\theta - \sin\vartheta)\}$$

2a] Calcolare il valore dell'integrale doppio $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$, dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\} \quad \text{e} \quad f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)\ .$$

3a] Calcolare il volume della regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ 0 \leq ze^{-x} \leq y \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ x^2 + y^2 \leq 1\}\ .$$

4a] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$.

i) Classificare la natura della forma quadratica q_α definita da

$$q_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{x}^T M_\alpha \mathbf{x} \quad \text{per ogni } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\ .$$

ii) Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, tale che $\nabla f_\alpha(0,0) = (0;0)$ e $Hf_\alpha(0,0) = M_\alpha$. Stabilire, quando possibile, la natura (max/min/sella) del punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5a] Calcolare il valore dell'integrale doppio $\iint\limits_{D} g(x,y)\,dxdy$, dove

$$g(x,y) = xy \quad \text{e} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2y\}.$$

6a] Calcolare l'area della regione $D \subset \mathbb{R}^2$ descritta, in coordinate polari, da

$$D = \{(\rho, \vartheta) : 0 \leq \vartheta \leq \tfrac{\pi}{4},\ 0 \leq \rho \leq \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\}\ .$$

7a] i) Verificare che il punto $\mathbf{a} = (0,1,2)$ è stazionario per la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 4\sqrt{y(x+1)(z-1)}\ .$$

ii) Stabilirne la natura (max/min/sella).

8a] Sia Σ l'insieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando attorno all'asse z l'arco di curva

$$\gamma = \{(x,y,z) : y = 0,\ z = 8 - x^2 \geq 0\} = \{(x, 0, 8 - x^2) : 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}\}.$$

Determinare un versore $\mathbf{n}$, normale a Σ nel punto $\mathbf{a} = (1,2,3)$.

Cognome......................................**Nome**..............................**Matr**..................

LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - prof. M.Vignati

27 nov 2019 I prova in itinere versione b

1b] Calcolare la lunghezza del sostegno γ della curva piana descritta, in coordinate polari, da:

$$\{\vartheta \in [\frac{\pi}{4}, \pi],\ \rho(\vartheta) = 4(\sin\theta - \cos\vartheta)\}$$

2b] Calcolare il valore dell'integrale doppio $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$, dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \quad \text{e} \quad f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)\ .$$

3b] Calcolare il volume della regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ 0 \leq ze^{-x} \leq y \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

4b] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

i) Classificare la natura della forma quadratica q_α definita da

$$q_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{x}^T M_\alpha \mathbf{x} \quad \text{per ogni } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\ .$$

ii) Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, tale che $\nabla f_\alpha(0,0) = (0;0)$ e $Hf_\alpha(0,0) = M_\alpha$.
Stabilire, quando possibile, la natura (max/min/sella) del punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5b] Calcolare il valore dell'integrale doppio $\iint\limits_{D} g(x,y)\,dxdy$, dove

$$g(x,y) = xy \quad \text{e} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4x\}.$$

6b] Calcolare l'area della regione $D \subset \mathbb{R}^2$ descritta, in coordinate polari, da

$$D = \{(\rho, \vartheta) : \tfrac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \tfrac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\}\ .$$

7b] **i)** Verificare che il punto $\mathbf{b} = (2,1,0)$ è stazionario per la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 4\sqrt{y(x-1)(z+1)}\ .$$

ii) Stabilirne la natura (max/min/sella).

8b] Sia Σ l'insieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando attorno all'asse z l'arco di curva

$$\gamma = \{(x,y,z) : y = 0,\ z = 8 - x^2 \geq 0\} = \{(x, 0, 8 - x^2) : 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}\}.$$

Determinare un versore $\mathbf{n}$, normale a Σ nel punto $\mathbf{b} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 3)$.

Cognome.......................................**Nome**...............................**Matr**...................

LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - prof. M.Vignati

27 nov 2019 I prova in itinere versione C

1c] Calcolare il valore dell'integrale doppio $\iint_{\Omega} f(x,y)\, dxdy$, dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq e^2\} \quad \text{e} \quad f(x,y) = \ln(x^2+y^2)\ .$$

2c] Calcolare la lunghezza del sostegno γ della curva piana descritta, in coordinate polari, da:

$$\{\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}],\ \rho(\vartheta) = 2\sqrt{2}(\cos\theta - \sin\vartheta)\}$$

3c] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$.

i) Classificare la natura della forma quadratica q_α definita da

$$q_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{x}^T M_\alpha \mathbf{x} \quad \text{per ogni } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\ .$$

ii) Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, tale che $\nabla f_\alpha(0,0) = (0;0)$ e $Hf_\alpha(0,0) = M_\alpha$. Stabilire, quando possibile, la natura (max/min/sella) del punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4c] Calcolare il volume della regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ 0 \leq ze^{-x} \leq y \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ x^2+y^2 \leq 1\}\ .$$

5c] Calcolare l'area della regione $D \subset \mathbb{R}^2$ descritta, in coordinate polari, da

$$D = \{(\rho,\vartheta) : 0 \leq \vartheta \leq \tfrac{\pi}{4},\ 0 \leq \rho \leq \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\}\ .$$

6c] Calcolare il valore dell'integrale doppio $\iint_D g(x,y)\, dxdy$, dove

$$g(x,y) = xy \quad \text{e} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 2y\}.$$

7c] Sia Σ l'insieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando attorno all'asse z l'arco di curva

$$\gamma = \{(x,y,z) : y = 0,\ z = 8 - x^2 \geq 0\} = \{(x,0,8-x^2) : 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}\}.$$

Determinare un versore $\mathbf{n}$, normale a Σ nel punto $\mathbf{c} = (1,2,3)$.

8c] **i)** Verificare che il punto $\mathbf{c} = (0,1,2)$ è stazionario per la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x-2z-4\sqrt{y(x+1)(z-1)}\ .$$

ii) Stabilirne la natura (max/min/sella).

Cognome.......................................**Nome**...............................**Matr**...................

LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - prof. M.Vignati

27 nov 2019 I prova in itinere versione d

1d] Calcolare il valore dell'integrale doppio $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$, dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\} \quad \text{e} \quad f(x,y) = \ln(x^2+y^2)\ .$$

2d] Calcolare la lunghezza del sostegno γ della curva piana descritta, in coordinate polari, da:

$$\{\vartheta \in [\frac{\pi}{4}, \pi],\ \rho(\vartheta) = 4(\sin\theta - \cos\vartheta)\}$$

3d] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

i) Classificare la natura della forma quadratica q_α definita da

$$q_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{x}^T M_\alpha \mathbf{x} \quad \text{per ogni } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\ .$$

ii) Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, tale che $\nabla f_\alpha(0,0) = (0;0)$ e $Hf_\alpha(0,0) = M_\alpha$. Stabilire, quando possibile, la natura (max/min/sella) del punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4d] Calcolare il volume della regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ 0 \leq ze^{-x} \leq y \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ x^2+y^2 \leq 1\}$$

5d] Calcolare l'area della regione $D \subset \mathbb{R}^2$ descritta, in coordinate polari, da

$$D = \{(\rho,\vartheta) : \tfrac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \tfrac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\}\ .$$

6d] Calcolare il valore dell'integrale doppio $\iint\limits_{D} g(x,y)\,dxdy$, dove

$$g(x,y) = xy \quad \text{e} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4x\}.$$

7d] Sia Σ l'insieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando attorno all'asse z l'arco di curva

$$\gamma = \{(x,y,z) : y = 0,\ z = 8 - x^2 \geq 0\} = \{(x,0,8-x^2) : 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}\}.$$

Determinare un versore $\mathbf{n}$, normale a Σ nel punto $\mathbf{d} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 3)$.

8d] **i)** Verificare che il punto $\mathbf{d} = (2,1,0)$ è stazionario per la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x+2z-4\sqrt{y(x-1)(z+1)}\ .$$

ii) Stabilirne la natura (max/min/sella).