Cognome..Nome...............................Matr...................

LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica**

22.1.2020 prof. M.Vignati **II prova parziale**

1] **i)** Per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) := \left(\alpha xz - ye^x \, ; \beta z^2 e^y - e^x \, ; \beta x^2 + 4ze^y\right)$$

è conservativo in $\mathbb{R}^3$?

ii) Per questi valori, calcolarne un potenziale $U(x,y,z)$.

iii) Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si calcoli $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{p}$, dove Γ^+ è l'arco di curva ottenuto come intersezione delle superfici $\{y=0\}$ e $\left\{z = x^2\right\}$, percorso da $(0,0,0)$ a $(1,0,1)$.

2] Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\right\}$. Il suo bordo $\partial\Omega$ è costituito dall'unione delle quattro superfici

$\Sigma_1 = \partial\Omega \cap \{x=0\}$, $\Sigma_2 = \partial\Omega \cap \{y=0\}$, $\Sigma_3 = \partial\Omega \cap \{z=0\}$, $\Sigma_4 = \partial\Omega \cap \left\{x^2+y^2+z^2=1\right\}$.

e viene orientato scegliendo il versore normale $\mathbf{n}$ "uscente da Ω".

Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x - yz \, ; \, y(1-x) \, ; \, z(1-x))$, si calcolino:

i) il flusso totale $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ uscente da Ω.

ii) i quattro flussi $\displaystyle\iint_{\Sigma_j} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (j = 1,2,3,4)$.

3] Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) : 0 \le z \le 3 - \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$, e sia

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(5x + y^2 - z \, ; x^2y^2 + 3z \, ; x(z-y)\right).$$

i) Calcolare il volume di Ω.

ii) Calcolare l'area di $\partial\Omega$.

iii) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ uscente da Ω.

4] Sia $\mathbf{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare, con $\mathbf{p}(0) = (2,0,0)$ e $\mathbf{p}(1) = \mathbf{b}$.

Determinare tutti i punti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ per i quali si ha $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{p} = 0$, dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x; y; z)$$

5] Dopo aver determinato tutte le soluzioni di

$$(*) \quad y'' - 4y' + 3y = 24e^{-t},$$

stabilire per quante e quali coppie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (*) \\ y(0) = a \, ; \; y'(0) = b \end{cases}$$

soddisfa $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.