CALCOLO NUMERICO - ANALISI NUMERICA (12 aprile 2007)

1) Si consideri il metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k),\ k \geq 0,\ x_0$ assegnato, applicato alla funzione definita a tratti

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^3 & x < 0 \end{cases}$$

Indicare quali sono i punti fissi e studiare la convergenza del metodo al variare del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$, determinando anche l'ordine.

2) Determinare i valori di c_0, c_1, c_2 in modo che la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x \approx c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)$$

abbia grado di precisione massimo.

3) Assegnati i nodi $x_k = k^2+1,\ k = 0, ..., n$, e la funzione $f(x) = \sqrt{x-1}+1$,

3.1) nel caso $n = 2$ determinare il polinomio $p(x)$ che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi assegnati;

3.2) nel caso $n = 4$ determinare la retta che meglio approssima i punti $(x_k, f(x_k))$ nel senso dei minimi quadrati.

4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & 2a^2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

4.1) calcolare $\|A\|_1$ e tracciarne il grafico al variare di a;

4.2) calcolare $\|A\|_\infty$ e tracciarne il grafico al variare di a;

4.3) studiare la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.