CALCOLO NUMERICO - ANALISI NUMERICA (17 aprile 2009)

1) Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x & 2 \\ x & 2x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

dopo aver determinato i valori di x per i quali la matrice M è singolare, si calcoli il condizionamento della funzione $f(x) = \det(M)$ e si determinino i valori di x per i quali il calcolo della funzione è ben condizionato nel senso che il numero di condizionamento risulta inferiore a 2.

2) Data $f(x) = x^4$ si costruisca il polinomio p_2 che interpola f nei nodi $x_i = i,\ i = 0, 1, 2$ e si fornisca una maggiorazione dell'errore $|f(x) - p(x)|$, $x \in [0, 2]$.

3) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1 & -a \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}, \quad a > 0,$$

indicare per quali valori di a:

3.1) la matrice A è non singolare;

3.2) la matrice A è diagonalmente dominante;

3.3) il metodo di Jacobi è convergente;

3.4) il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

Per i valori di a per cui entrambi i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, si dica quale fra i due metodi converge più velocemente.

4) Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x + 1)\mathrm{d}x$$

con la formula di Cavalieri-Simpson e calcolare l'errore commesso.

Successivamente si calcoli il numero minimo di intervalli necessario per approssimare I con un errore assoluto $\leq 10^{-4}$, utilizzando la formula dei trapezi composita.

5) Tradurre le seguenti istruzioni MATLAB e descrivere il loro utilizzo nell'ambito dell'interpolazione di funzioni:

```
n = input('numerodipunti =');

a = -5; b = 5;

xcheb = cos((1 : 2 : (2 * n - 1)) * pi/(2 * n));

a1 = (b - a)/2;  a0 = (b + a)/2;  xcheb = a1 * xcheb + a0;
```