

ANALISI NUMERICA - CALCOLO NUMERICO (13 febbraio 2008)

- 1) Trovare il numero di condizionamento della funzione

$$y = \frac{2}{x^2 + 1}$$

e dimostrare che il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che il numero di condizionamento risulta inferiore a 10, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- 2) Determinare a , b e c in modo che la formula di quadratura

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \approx af(-1) + bf(0) + cf(1)$$

abbia grado di precisione massimo. Si applichi quindi la formula ottenuta per approssimare l'integrale definito

$$\int_{-2}^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx$$

e si calcoli l'errore commesso.

- 3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \alpha \\ 1 + \alpha & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^2,$$

dimostrare che la matrice A è non singolare $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Ricavare la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi al variare di α .

Nei casi particolari $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ scrivere B_J e calcolare per entrambi i casi $\|B_J\|_1$ e $\|B_J\|_\infty$.

- 4) Determinare i valori dei parametri $A, B \in \mathbb{R}$ affinché la funzione

$$S(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4}x + Ax^3 & x \in [0, 1) \\ 1 - \frac{1}{2}(x-1) + B(x-1)^2 + (x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

sia una spline cubica. Dire se è naturale. Calcolare il valore della spline nei punti $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 1.5$.

- 5) (*Solo per gli studenti con esame da 6 cfu*). Definire il concetto di assoluta stabilità di un metodo numerico per l'approssimazione di un problema di Cauchy e studiare l'assoluta stabilità del metodo di Eulero implicito e del metodo di Crank-Nicolson (o dei trapezi).

Tempo a disposizione: 2^h per l'esame da 5 cfu, $2^h 30'$ per l'esame da 6 cfu.