CALCOLO NUMERICO (26 gennaio 2006)

1) Assegnati i nodi $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$ e la funzione $f(x) = \frac{1}{x+2}$:

   2.1) Determinare il polinomio $p(x)$, nella forma di Lagrange, che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi assegnati.

   2.2) Determinare il polinomio $p(x)$, nella forma di Newton, che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi assegnati.

   2.3) Dare una maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo ad f il polinomio p, per $x \in [-1, 1]$.

2) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^3$ e

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{bmatrix}.$$

   Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$:

   2.1) A è definita positiva;

   2.2) A è diagonalmente dominante;

   2.3) il metodo di Jacobi è convergente;

   2.4) il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

3) Determinare il grado di precisione della formula di quadratura

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{4}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} f(1) + \frac{4}{3} f\left(\frac{3}{2}\right).$$

4) Si vuole approssimare la radice positiva α dell'equazione non lineare $f(x) \equiv x^2 - 5 = 0$. Dimostrare che il metodo di Newton converge ad α in $I = [1, 4]$, $\forall x_0 \in I$. Determinare α con un errore $< 10^{-4}$, e dare una giustificazione del test d'arresto (utilizzare $x_0 = 2.5$).

5) Approssimazione di dati e funzioni con splines.