ANALISI NUMERICA - CALCOLO NUMERICO (29 gennaio 2008)

1) Determinare il grado di precisione della formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}\left[2f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

Utilizzare la formula di quadratura per approssimare

$$\int_{-1}^{1} (x^4+1)\ \mathrm{d}x$$

e calcolare l'errore commesso.

2) Studiare convergenza e ordine dei metodi iterativi

$$(*) \quad x_{k+1} = \ln x_k + 2, \quad (**) \quad x_{k+1} = \exp\left(x_k - 2\right), \quad k \geq 0,\ x_0 \in \mathbb{R},$$

per la soluzione dell'equazione non lineare $f(x) = x - \ln x - 2 = 0$.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3,$$

fornire una condizione necessaria e sufficiente su α affinchè:

3.1) la matrice A sia non singolare;

3.2) la matrice A sia diagonalmente dominante;

3.3) il metodo di Jacobi converga alla soluzione del sistema;

3.4) il metodo di Gauss-Seidel converga alla soluzione del sistema.

4) Dati i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, ..., 3$, dove $x_i = i$, $f(x) = x + \cos(\pi x)$, disegnare i punti assegnati e determinare e disegnare la retta che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati. Dimostrare poi che il punto di coordinate (M_x, M_y) appartiene alla retta trovata, dove

$$M_x = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} x_i, \quad M_y = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} f(x_i)$$

5) (*Solo per gli studenti con esame da 6 cfu*). Descrivere un procedimento a scelta per la costruzione del metodo di Eulero esplicito. Definire il concetto di assoluta stabilità di un metodo numerico per l'approssimazione di un problema di Cauchy e ricavare l'intervallo di assoluta stabilità del metodo di Eulero esplicito.

Tempo a disposizione: 2^h per l'esame da 5 cfu, 2^h30' per l'esame da 6 cfu.