CALCOLO NUMERICO - ANALISI NUMERICA (14 gennaio 2009)

1) Assegnati i nodi $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1$ e la funzione $f(x) = \frac{3x^2}{1+x}$

   1.1) Determinare il polinomio $p_1(x)$ di grado 1, che interpola la funzione f nei nodi x_0 e x_1 e successivamente il polinomio $p_2(x)$ di grado 2, che interpola la funzione f nei nodi x_0, x_1 e x_2.

   1.2) Determinare per quali $x > -1$ vale la disuguaglianza $p_2(x) > f(x)$.

2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}:$$

   2.1) Dimostrare che la matrice A è non singolare, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

   2.2) Indicare per quali valori di α il metodo di Jacobi è convergente e calcolare per quali valori di α risulta $\|B_J\|_1 = 5$, dove B_J è la matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

   2.3) Nel caso particolare $\alpha = 1$ calcolare la fattorizzazione LU della matrice A e verificare che $A = LU$.

3) Determinare i coefficienti $a,\ b,\ c$ della formula di quadratura

$$\int_{-2}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x \approx af(-2) + bf(0) + cf(1),$$

   in modo che abbia grado di precisione massimo.

4) Data l'equazione non lineare $f(x) := \frac{x^3}{2} - x = 0$ studiare la convergenza, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ del metodo iterativo $x_{n+1} = \frac{x_n^3}{2}$, per approssimare le radici dell'equazione non lineare $f(x) = 0$, indicando anche l'ordine di convergenza.

5) Tradurre le seguenti istruzioni MATLAB e descrivere il loro utilizzo nell'ambito dello studio della convergenza dei metodi iterativi per sistemi lineari:

```
>> n = input('dimensione del sistema =')
>> a = 4 * eye(n) + diag(ones(n - 1, 1), -1) + diag(ones(n - 1, 1), 1);
>> d = diag(a); l = tril(a, -1); u = triu(a, +1);
>> mjac = diag(1./d) * (-l - u); rho = max(abs(eig(mjac)));
```