

**CALCOLO NUMERICO - ANALISI NUMERICA** (13 gennaio 2010)

- 1) Si costruisca la matrice pentadiagonale di dimensione  $n = 8, 16$  avente 8 sulla diagonale principale, 1 sulle diagonali di posizione  $\pm 1$ , 2 sulle diagonali di posizione  $\pm 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 2 & 1 & 8 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- 1.1) Si riporti il numero di condizionamento di  $A$  rispetto alla norma 2:

$$K_2(A) = (\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|}.$$

- 1.2) Si costruisca la matrice di iterazione  $B_{J,n}$  del metodo di Jacobi e si riportino i valori del raggio spettrale  $\rho(B_{J,n})$ .

- 1.3) Si risolva il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mediante il metodo iterativo di Jacobi, con  $b_i = 1$ ,  $x_i^{(0)} = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , test d'arresto  $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\|_2 < 10^{-6}$ , e si fornisca il numero di iterazioni eseguite  $\mathbf{it}$  e il valore delle componenti  $1, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, n$  del vettore soluzione  $\mathbf{x}^{(\mathbf{it})}$ .

- 2) Si vuole approssimare l'integrale improprio

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx,$$

con il metodo dei trapezi composti applicato all'integrale

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{\sin x}{x} dx,$$

con  $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ , utilizzando  $m = 100, 1000$  sottointervalli. Si riportino i 6 valori approssimati di  $I_\varepsilon$  trovati al variare di  $m$  e di  $\varepsilon$ .

- 3) Si approssimi la radice  $\alpha = 2$  dell'equazione non lineare

$$f(x) \approx 1 - e^{-2(x-2)^3} = 0,$$

avente molteplicità  $q > 1$ , con il metodo di Newton modificato

$$x_{n+1} = x_n - p \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad p = 2, 3, 4$$

utilizzando  $x_0 = 1$ , test d'arresto  $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$ , e si riporti per ciascuno dei tre valori di  $p$  considerati il numero di iterazioni eseguite  $\mathbf{it}$ , il valore  $x_{\mathbf{it}}$  e l'errore commesso  $|\alpha - x_{\mathbf{it}}|$ . Si commentino i risultati ottenuti e si deduca sperimentalmente il valore di  $q$ .

**CALCOLO NUMERICO - ANALISI NUMERICA** (13 gennaio 2010)

Cognome ..... Nome ..... Matricola .....

email (di Ateneo) .....

Esercizio 1

	$K_2(A)$	$\rho(B_{J,n})$	it	$x_1$	$x_{\frac{n}{2}}$	$x_{\frac{n}{2}+1}$	$x_n$
$n = 8$							
$n = 16$							

Esercizio 2

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$m = 100$			
$m = 1000$			

Esercizio 3

	it	$x_{it}$	$ \alpha - x_{it} $
$p = 2$			
$p = 3$			
$p = 4$			

$q = \dots$  Perché?