CALCOLO NUMERICO (15 giugno 2005)

1) Dimostrare - a scelta - una stima dell'errore associata a una formula di quadratura composita.

2) Discutere la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3) Considerare l'equazione non lineare $x - \cos(x) = 0$. Dimostrare graficamente che l'equazione ha una radice: $\alpha \in (0, \frac{\pi}{3})$. Dimostrare che il procedimento iterativo $x_{n+1} = \cos(x_n)$, $n = 0, 1, ...$, converge alla radice α per ogni scelta di $x_0 \in (0, \frac{\pi}{3})$.

4) Determinare b_1, b_2 e b_3 in modo che la formula di quadratura

$$\int_0^4 f(x)\ \mathrm{d}x \approx b_1 f(1) + b_2 f(2) + b_3 f(3)$$

abbia grado di precisione massimo. Si applichi quindi la formula ottenuta per approssimare l'integrale definito

$$\int_0^4 \cos\frac{\pi}{3}t\ \mathrm{d}t$$

e si calcoli l'errore commesso.

5) Si consideri la funzione $f(x) = e^x$ per $x \in [0, 2]$. Si determini il polinomio $p_2(x)$ che inteerpola $f(x)$ nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Si fornisca una stima dell'errore $f(x) - p_2(x)$ al variare di $x \in [0, 2]$.