ANALISI NUMERICA / CALCOLO NUMERICO (16 giugno 2006)

1) Si studi graficamente la convergenza del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, con
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right).$$
Si indichi anche l'ordine di convergenza del metodo.

2) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^3$ e
$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1) Determinare per quali valori di α la matrice A è non singolare.

2.2) Calcolare $\|B_J\|_\infty$, dove B_J è la matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

2.3) Determinare per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel converge.

3) Determinare i valori di a, b, c affinchè il grado di precisione della formula di quadratura
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx af(0) + bf\left(\frac{1}{3}\right) + cf\left(\frac{2}{3}\right)$$
sia massimo.

4) Data la funzione $f(x) = e^x$ determinare, mediante il metodo di interpolazione di Lagrange, il polinomio $p_1(x)$ che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi $x_0 = -h$, $x_1 = h$, con $0 < h \leq 1$ e fornire una maggiorazione dell'errore $|f(x) - p_1(x)|$, per $x \in [-h, h]$.

Calcolare al variare del parametro h la quantità
$$\int_{-1}^1 x_0 L_0(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 x_1 L_1(x)\mathrm{d}x,$$
dove $L_0(x)$ e $L_1(x)$ sono i polinomi di base di Lagrange associati ai nodi x_0 e x_1.

5) (*Solo per gli studenti di Analisi Numerica*)

Studiare l'assoluta stabilità dei metodi di Eulero esplicito e implicito.