ANALISI NUMERICA - CALCOLO NUMERICO (4 giugno 2008)

1) Si consideri il metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, x_0 assegnato, applicato alla funzione $g(x) = (x-2)^3 + 2$.

   Indicare quali sono i punti fissi e studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo al variare del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.

2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} :$$

   2.1) Indicare per quali valori di α la matrice A è non singolare.

   2.2) Indicare per quali valori di α la matrice A è diagonalmente dominante.

   2.3) Indicare per quali valori di α il metodo di Jacobi è convergente.

   2.4) Indicare per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

   2.5) Costruire esplicitamente la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e stabilire per quali α risulta $\|B_J\|_\infty < 1$.

3) Sono dati i punti $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$, e i corrispondenti valori di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nei punti assegnati:

$$y_0 =: f(0) = 1, \quad y_1 =: f(1) = 2, \quad y_2 =: f(2) = 4.$$

   3.1) Costruire il polinomio $p_2 \in \mathbb{P}_2$ che interpola f nei nodi $x_0,\ x_1,\ x_2$.

   3.2) Calcolare il valore dell'integrale definito

$$I_p =: \int_0^2 p_2(x)\mathrm{d}x.$$

   3.3) Verificare che I_p coincide con il valore che si trova approssimando

$$I_f =: \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$$

   con la formula di Cavalieri Simpson.

4) (*Solo per gli studenti con esame da 6 cfu*). Descrivere un procedimento a scelta per la costruzione del metodo di Eulero esplicito o del metodo di Eulero implicito. Definire il concetto di assoluta stabilità di un metodo numerico per l'approssimazione di un problema di Cauchy e ricavare l'intervallo di assoluta stabilità del metodo di Eulero esplicito o del metodo di Eulero implicito

Tempo a disposizione: 2^h per l'esame da 5 cfu, $2^h30'$ per l'esame da 6 cfu.