ANALISI NUMERICA (28 giugno 2010)

1) Si consideri la matrice sparsa A di dimensione $N \times N$, avente gli elementi della diagonale principale uguali a N, gli elementi della prima sottodiagonale e della prima sopradiagonale uguali a -1, gli elementi $A(1,N) = A(N,1) = 5$, e tutti gli altri elementi uguali a zero.

   Utilizzando $N = 10, 20, 40$, si riportino nella tabella le seguenti quantità:

1.1) il numero di elementi non nulli delle matrici A, L, U, dove $PA = LU$ è la fattorizzazione della matrice A;

1.2) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con $\mathbf{f} = (1, 4, 9, ..., N^2)^T, \ \in \mathbb{R}^N$.

   Si costruisca la matrice di iterazione $B_{J,N}$ del metodo di Jacobi e si riportino i valori del raggio spettrale $\rho(B_{J,N})$ al variare di N, e il numero di iterazioni necessarie affinchè $\|A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2 < 10^{-6}$, posto $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, ..., 0)^T$.

2) Per approssimare la radice α dell'equazione non lineare

$$f(x) = 0, \quad \text{dove } f(x) = \sin(x^3) - \frac{1}{2},$$

   si implementi la seguente procedura:

   2.1) trovare una prima approssimazione $\overline{x}$ della radice α con il metodo di bisezione applicato a f tale che $|\alpha - \overline{x}| < 0.05$, sapendo che $\alpha \in [0, 1]$;

   2.2) trovare un'approssimazione $\overline{\alpha}$ più accurata con il metodo di Newton in modo che $|\alpha - \overline{\alpha}| < 10^{-6}$, scegliendo come valore di innesco $\overline{x}$ ottenuto al punto 2.1).

   Si riporti il numero di iterazioni eseguite per ciascuno dei due metodi e i valori di $\overline{x}$ e $\overline{\alpha}$, utilizzando un formato con almeno 7 cifre decimali.

3) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1 + (x-2)^2}, \ x \in I = [-3, 3],$$

   sia p_n^e il polinomio di grado n che interpola f in $(n+1)$ nodi equispaziati di I e p_n^c il polinomio di grado n che interpola f negli $(n+1)$ nodi di Chebyshev di I. Utilizzare $n = 10, 20, 40$ e calcolare gli errori

$$E_n^e = \max_{j=0,\ldots,60} |f(z_j) - p_n^e(z_j)|, \quad E_n^c = \max_{j=0,\ldots,60} |f(z_j) - p_n^c(z_j)|,$$

   dove $\{z_j\}_{j=0}^{60}$ sono 61 nodi equispaziati di I:

$$z_j = -3 + \frac{1}{10} j, \quad j = 0, ..., 60.$$

ANALISI NUMERICA (28 giugno 2010)

Cognome .... Nome .... Matricola ....

email (di Ateneo) ....

Esercizio 1

N	n. el $\neq 0$: A	n. el $\neq 0$: L	n. el $\neq 0$: U	$\rho(B_{J,N})$	`it`(J)
10					
20					
40					

Esercizio 2

$\overline{x} =$ numero di iterazioni per il metodo di bisezione=

$\overline{\alpha} =$ numero di iterazioni per il metodo di Newton=

Esercizio 3

n	E_n^e	E_n^c
10		
20		
40		