CALCOLO NUMERICO (15 giugno 2011)

1) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di dimensione n, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & k & ... & k \\ 2^2 & 2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n^2 & 0 & 0 & ... & n \end{bmatrix}, \quad k = \frac{1}{2}, \quad b_i = (-1)^i, \ i = 1, ..., n,$$

lo si risolva utilizzando la fattorizzazione $PA = LU$, con $n = 20, 100, 500$.

Riportare le componenti x_1 e x_2 della soluzione $\mathbf{x}$.

Successivamente si risolva il sistema perturbato $A_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$, dove

$$A_1 = A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & 0 & ... & ... & ... \\ 0.01 & 0.01 & 0.01 & ... & 0.01 \end{bmatrix},$$

utilizzando la fattorizzazione $P_1A_1 = L_1U_1$ della matrice perturbata A_1.

Calcolare le perturbazioni relative $\Delta_{\mathbf{x}} = \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$, $\Delta_A = \frac{\|A-A_1\|_1}{\|A\|_1}$.

2) Dati $n+1$ nodi equispaziati x_j, $j = 1, ..., n+1$ sull'intervallo $[-5, 5]$, $n+1$ valori $y_j = f(x_j)$, con $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $n = 40, 80$, i punti $z_i = -5 + ih$, $i = 0, ..., 1000$, $h = 0.01$, si costruiscano:

1) la spline lineare s_1 interpolante i dati (x_j, y_j), $j = 0, ..., n$;

2) il polinomio di Lagrange p_n interpolante i dati (x_j, y_j), $j = 0, ..., n$;

3) il polinomio di Lagrange P_n interpolante i dati (X_j, Y_j), $j = 0, ..., n$, dove gli X_j sono i nodi di Chebyshev sull'intervallo $[-5, 5]$ e $Y_j = f(X_j)$.

Si riportino nella tabella i seguenti errori:

$$e_1 = \max_{z_i} |s_1(z_i) - f(z_i)|, \ e_n = \max_{z_i} |p_n(z_i) - f(z_i)|, \ E_n = \max_{z_i} |P_n(z_i) - f(z_i)|.$$

3) Data la funzione $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ si utilizzi il metodo di Newton per approssimare i primi due zeri positivi α e β $(0 < \alpha < \beta)$ utilizzando, rispettivamente, i valori iniziali $x_\alpha^{(0)} = 0.5$ e $x_\beta^{(0)} = 3.5$. Sia `it1` (risp. `it2`) il numero di iterazioni necessarie affinchè sia soddisfatto il test d'arresto

$$|x_\alpha^{(\mathtt{it1})} - \alpha| < 10^{-7}, \quad (\text{risp. } |x_\beta^{(\mathtt{it2})} - \beta| < 10^{-7}).$$

Riportare nella tabella i valori di `it1`, `it2`, $x_\alpha^{(\mathtt{it1})}$, $x_\beta^{(\mathtt{it2})}$.

Successivamente si approssimi il valore dell'integrale definito

$$I = \int_\alpha^\beta [f(x)]^2 \mathrm{d}x, \quad \left(= 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \right),$$

con il metodo dei trapezi compositi (sia $\tilde{I}$ il valore approssimato), utilizzando $m = 25$ sottointervalli e i valori $x_\alpha^{(\mathtt{it1})}$ e $x_\beta^{(\mathtt{it2})}$ al posto di α e β. Riportare nella tabella l'errore $|I - \tilde{I}|$.

CALCOLO NUMERICO (15 giugno 2011)

Cognome .... Nome .... Matricola ....

email (di Ateneo) ....

Esercizio 1

n	x_1	x_2	$\Delta_{\mathbf{x}}$	Δ_A
20				
100				
500				

Esercizio 2

n	e_1	e_n	E_n
40			
80			

Esercizio 3

$\texttt{it}_1$	$\texttt{it}_2$	$x_\alpha^{(\texttt{it1})}$	$x_\beta^{(\texttt{it2})}$	$\lvert I - \tilde{I} \rvert$