

COMPLEMENTI DI MATEMATICA
PROVA SCRITTA
(14 giugno 2012)

- 1) Assegnati i nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e la funzione $f(x) = 2x^4 - 1$:
- 1.1) Determinare il polinomio $p_2(x)$, nella forma di Lagrange, che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi assegnati.
 - 1.2) Dare una maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo ad f il polinomio p_2 , per $x \in [-1, 1]$.
- 2) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^3$ e

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0.$$

Calcolare $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$.

Determinare inoltre per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$:

- 2.1) A è definita positiva;
- 2.2) A è diagonalmente dominante;
- 2.3) il metodo di Jacobi è convergente;
- 2.4) il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

Per i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali entrambi i metodi sono convergenti stabilire la relazione tra le due velocità di convergenza.

- 3) Dato il metodo di punto fisso $x_{n+1} = g(x_n)$, con

$$g(x) = x(1 + \beta x^2) + \gamma e^{x-1} - (\beta + \gamma),$$

verificare che $\alpha = 1$ è un punto fisso per g per ogni coppia di valori β e γ .

- 3.1) Quale relazione deve sussistere fra β e γ affinché il metodo sia almeno di ordine 2?
- 3.2) Per quali valori di β e γ il metodo è almeno di ordine 3?
- 3.3) Esistono valori di β e γ per i quali il metodo ha ordine 4?

NON E' RICHiesto LO STUDIO GRAFICO