

**ANALISI NUMERICA - CALCOLO NUMERICO** (16 luglio 2007)

- 1) Dato il metodo iterativo di punto fisso

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}e^{x_k-1}, \quad k \geq 0 :$$

- 1.a) dimostrare che esistono due punti fissi  $\alpha$  e  $\beta$ , con  $\alpha \in [0, 1]$  e  $\beta \in [2, 3]$ ;  
1.b) studiare graficamente la convergenza al variare di  $x_0 \in \mathbb{R}$ , e specificare l'ordine.

- 2) Dato il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  e

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} :$$

- 2.a) indicare per quali valori di  $\alpha$  la matrice  $A$  è non singolare;  
2.b) indicare per quali valori di  $\alpha$  la matrice  $A$  è diagonalmente dominante;  
2.c) calcolare  $\|A\|_\infty$ , tracciarne il grafico al variare di  $\alpha$  e stabilire per quali valori di  $\alpha$  risulta  $\|A\|_\infty = 10$ ;  
2.d) indicare per quali valori di  $\alpha$  il metodo di Jacobi è convergente;  
2.e) indicare per quali valori di  $\alpha$  il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

- 3) Determinare i valori dei parametri  $A, B \in \mathbb{R}$  affinché la funzione

$$S(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4}(x-1) + A(x-1)^3 & x \in [1, 2) \\ 1 - \frac{1}{2}(x-2) + B(x-2)^2 + (x-2)^3 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

sia una spline cubica. Dire se è naturale e calcolare il valore  $S(2.5)$ .

- 4) Determinare i valori di  $a, b, c$  affinché il grado di precisione della formula di quadratura

$$\int_0^2 f(x)dx \approx af(0) + bf\left(\frac{1}{2}\right) + bf\left(\frac{3}{2}\right) + cf(2)$$

sia massimo. Utilizzare la formula ottenuta per approssimare l'integrale definito

$$\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

e calcolare l'errore commesso.

- 5) (*Solo per gli studenti con esame da 6 cfu*). Descrivere un procedimento a scelta per la costruzione del metodo di Eulero implicito. Definire il concetto di assoluta stabilità di un metodo numerico per l'approssimazione di un problema di Cauchy e ricavare l'intervallo di assoluta stabilità del metodo di Eulero implicito.

Tempo a disposizione:  $2^h$  per l'esame da 5 cfu,  $2^h30'$  per l'esame da 6 cfu.