ANALISI NUMERICA - CALCOLO NUMERICO (16 luglio 2008)

1) Dati i punti $(x_k, f(x_k))$, dove

$$x_k = -1 + \frac{k}{2}, \quad k = 0, ..., 4, \quad f(x) = |x| - 1,$$

disegnare i punti assegnati e determinare la retta che meglio li approssima nel senso dei minimi quadrati. Costruire poi il polinomio di interpolazione $p_2(x) \in \mathbb{P}_2$ relativo ai dati $(x_k, f(x_k))$, $k = 1, 2, 3$ e calcolare l'errore $|f(0.25) - p_2(0.25)|$.

2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}:$$

2.1) Indicare per quali valori di α la matrice A è non singolare.

2.2) Indicare per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

2.3) Costruire la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e rappresentare graficamente la quantità $\rho(B_J)$ al variare di α.

3) Si consideri l'integrale

$$I(f) = \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x,$$

e si valuti il numero minimo di intervalli necessario per calcolare $I(f)$ con un errore assoluto $\leq 10^{-3}$, utilizzando la formula dei trapezi composita. Successivamente si applichi la formula dei trapezi compositi con 3 sottointervalli e si calcoli l'errore commesso.

4) Si vuole approssimare la radice maggiore α dell'equazione non lineare $f(x) \equiv x^2 - 2x - 1 = 0$.

Dimostrare che il metodo di Newton converge ad α in $I = [2, 3]$, $\forall x_0 \in I$.

Applicare il metodo di Newton per calcolare x_2 a partire da $x_0 = 3$.

5) (*Solo per gli studenti con esame da 6 cfu*). Descrivere un procedimento a scelta per la costruzione del metodo di Crank-Nicolson. Definire il concetto di assoluta stabilità di un metodo numerico per l'approssimazione di un problema di Cauchy e ricavare l'intervallo di assoluta stabilità del metodo di Crank-Nicolson.