ANALISI NUMERICA (21 luglio 2010)

1) Dato il polinomio $p(x) = x^6+x^4+x^2+1$, si trovi il polinomio $q(x) = p'(x)$, mediante un'opportuna function MATLAB. Sapendo che

$$I = \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x = p(1) - p(0),$$

si approssimi I con la formula dei trapezi compositi utilizzando 8 sottointervalli (sia I_8 il valore ottenuto), si calcoli l'errore $E = |I - I_8|$ e lo si confronti con la stima asintotica (S). Riportare nella tabella I_8, E e S.

2) Data la matrice A di dimensione $(n+1)\times(n+1)$, avente gli elementi della diagonale principale e della prima colonna uguali a 1, gli elementi della prima sopradiagonale uguali a ε, e tutti gli altri elementi uguali a zero, si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $b_1 = 1+\varepsilon$, $b_i = \varepsilon+2$, $i = 2, ..., n$, $b_{n+1} = 2$. Dopo avere calcolato $\mathbf{x}$, si perturbi il termine noto $\mathbf{b}$ con il vettore $\Delta\mathbf{b} = [\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, e si risolva il sistema perturbato $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$, dove $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ e $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$. Studiare il condizionamento della matrice al variare di n e di ε, tenendo conto della disuguaglianza

$$K_\infty(A) \geq \hat{K}_\infty(A) = \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}\,\frac{\|\mathbf{b}\|_\infty}{\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty}.$$

Riportare nella tabella il valore $\hat{K}_\infty(A)$ per n =64, 128, 256 e ε =0.01, 0.001.

3) Per approssimare la radice α dell'equazione non lineare

$$f(x) = x - g(x) = 0, \text{ con } g(x) = \frac{1+x^2}{1+x},$$

si implementi la seguente procedura: trovare una prima approssimazione $\overline{x}$ con il metodo di bisezione tale che $|\alpha - \overline{x}| < 0.1$, sapendo che $\alpha \in [0, 2]$; trovare poi un'approssimazione più accurata $\overline{\alpha}$ con il metodo iterativo

$$x_0 = \overline{x}, \quad x_{n+1} = g(x_n),\ n \geq 0,$$

in modo che $\mid \alpha - \overline{\alpha} \mid < 10^{-6}$. Si sa inoltre che, posto

$$\lambda_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}},\ n \geq 2,$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = g'(\alpha).$$

Riportare nella tabella: il numero di iterazioni del metodo di bisezione (`it1`), $\overline{x}$, il numero di iterazioni del metodo di punto fisso (`it2`), $\overline{\alpha}$, $\lambda_{\texttt{it2}}$ e $g'(\alpha)$.

ANALISI NUMERICA (21 luglio 2010)

Cognome .... Nome .... Matricola ....

email (di Ateneo) ....

Esercizio 1

I_8= E= S=

Esercizio 2

$\hat{K}_\infty$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$n = 64$		
$n = 128$		
$n = 256$		

Esercizio 3

`it1`	$\overline{x}$	`it2`	$\overline{\alpha}$	$\lambda_{\texttt{it2}}$	$g'(\alpha)$