ANALISI NUMERICA - CALCOLO NUMERICO (7 novembre 2007)

1) Costruire il polinomio di interpolazione relativo ai dati $(-2, 2)$, $(0, 5)$, $(4, 3)$, e successivamente quello relativo ai dati $(-2, 2)$, $(0, 5)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$, scegliendo, fra i metodi noti, quello che richiede il minor numero di operazioni.

2) Dopo aver costruito il polinomio dei minimi quadrati discreti di grado 1, $p_1(x)$, relativo ai nodi (x_i, y_i):

$$(-2, 6),\ (-1, 4),\ (0, 0),\ (1, -2),\ (2, -3),$$

verificare che passa per il punto di coordinate (M_x, M_y), dove

$$M_x = \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4} x_i, \quad M_y = \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4} y_i,$$

e calcolare l'errore globale commesso

$$E = \sum_{i=0}^{4} [y_i - p_1(x_i)]^2.$$

3) Data la formula di quadratura

$$\tilde{I}(f) = \alpha_1 f(-1.5) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(1.5)$$

per il calcolo approssimato di

$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x,$$

determinare i coefficienti α_j, $j = 1, 2, 3$, in modo che $\tilde{I}(f)$ abbia grado di precisione massimo.

4) Dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

4.1) calcolare le prime due iterate del metodo di Jacobi $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$;

4.2) calcolare $\|B_J\|_\infty$, dove B_J è la matrice di iterazione del metodo di Jacobi applicato al sistema assegnato.

5) (*Solo per gli studenti con esame da 6 cfu*). Descrivere un procedimento a scelta per la costruzione del metodo di Eulero esplicito. Definire il concetto di assoluta stabilità di un metodo numerico per l'approssimazione di un problema di Cauchy e ricavare l'intervallo di assoluta stabilità del metodo di Eulero esplicito.

Tempo a disposizione: 2^h per l'esame da 5 cfu, $2^h30'$ per l'esame da 6 cfu.