ANALISI NUMERICA - CALCOLO NUMERICO (31 ottobre 2006)

1) Determinare i valori di a e b affinchè il grado di precisione della formula di quadratura
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx af\left(\frac{1}{3}\right) + bf\left(\frac{2}{3}\right)$$
sia massimo.

Utilizzare la formula di quadratura ottenuta per approssimare l'integrale definito
$$\int_0^1 \sin \pi x \mathrm{d}x$$

2) Assegnati i nodi $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$ e la funzione $f(x) = x^3 - 1$ determinare il polinomio $p(x)$, nella forma di Lagrange, che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi assegnati e dare una maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo a f il polinomio p.

3) Si vuole approssimare la radice maggiore α dell'equazione non lineare $f(x) \equiv x^2 - 2x - 4 = 0$.

Dimostrare che il metodo di Newton converge ad α in $I = [2, 5]$, $\forall x_0 \in I$.

Applicare il metodo di Newton per calcolare x_2 a partire da $x_0 = 3$.

4) Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2\beta \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta > 0.$$

4.1) Determinare per quali valori di α e β la matrice A è non singolare.

4.2) Determinare per quali valori di α e β la matrice A è definita positiva.

4.3) Calcolare la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e determinare per quali valori di α e β si ha $\|B_J\|_1 < 1$ e per quali valori di α e β si ha $\rho(B_J) < 1$

5) (*Solo per gli studenti di Analisi Numerica*)

Descrivere il procedimento per costruire il metodo di Crank-Nicolson per l'approssimazione numerica di un problema di Cauchy e studiarne l' assoluta stabilità.