

ANALISI NUMERICA - CALCOLO NUMERICO (4 settembre 2007)

- 1) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare $f(x) = 0$, con $f(x) \equiv x^2 - 12$, e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma di metodo iterativo di punto fisso

$$(*) \quad x_{k+1} = g(x_k), \quad k \geq 0, \quad x_0 \text{ assegnato,}$$

- 1.1) verificare che le soluzioni dell'equazione non lineare $f(x) = 0$ coincidono con le soluzioni del problema di punto fisso $x = g(x)$;
1.2) discutere graficamente la convergenza del metodo (*) al variare di $x_0 > 0$ e stabilire l'ordine di convergenza del metodo;
1.3) determinare per quali $x > 0$ risulta $|g'(x)| < 1$.

- 2) Data la matrice A di dimensione $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \frac{2}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{n} & 2 & \frac{2}{n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{2}{n} & 2 & \frac{2}{n} \\ 0 & \dots & \dots & \frac{2}{n} & 1 \end{bmatrix}, \quad n \geq 3$$

- 2.1) verificare che la matrice A è diagonalmente dominante;
2.2) calcolare $\|A\|_\infty$, tracciarne il grafico al variare di n e stabilire per quale valore di n risulta $\|A\|_\infty = \frac{17}{4}$;
2.3) nel caso particolare $n = 4$ costruire la matrice di iterazione del metodo di Jacobi B_J e calcolare $\|B_J\|_\infty$.

- 3) Dato l'insieme di punti

$$\{(0, 1), (1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 1), (5, 2)\},$$

scrivere l'espressione della spline lineare $s_1(x)$ che interpola i dati e disegnarne il grafico. Calcolare $s_1(1.5)$.

- 4) Si consideri l'integrale

$$I(f) = \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx,$$

e si valuti il numero minimo di intervalli necessario per calcolare $I(f)$ con un errore assoluto $\leq 10^{-4}$, utilizzando la formula dei trapezi composita.

- 5) (*Solo per gli studenti con esame da 6 cfu*). Descrivere un procedimento a scelta per la costruzione del metodo di Eulero esplicito. Definire il concetto di consistenza di un metodo numerico per l'approssimazione di un problema di Cauchy e studiare la consistenza del metodo di Eulero esplicito.

Tempo a disposizione: 2^h per l'esame da 5 cfu, $2^h 30'$ per l'esame da 6 cfu.