

ANALISI NUMERICA - CALCOLO NUMERICO (11 settembre 2008)

- 1) Verificare che la funzione $y = S(x)$ definita da

$$S(x) = \begin{cases} 3x + 2x^2 - x^3 & x \in [0, 1) \\ 4 + 4(x-1) - (x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

è una spline cubica. Dire se è naturale.

- 2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \frac{4}{a} \\ 0 & 2a & 0 \\ \frac{a}{4} & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

indicare per quali valori di a :

- 2.1) la matrice A è non singolare;
 - 2.2) la matrice A è diagonalmente dominante;
 - 2.3) la matrice A è definita positiva;
 - 2.4) il metodo di Jacobi è convergente;
 - 2.5) il metodo di Gauss-Seidel è convergente.
- 3) Data la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx af\left(-\frac{1}{2}\right) + bf(0) + cf\left(\frac{1}{2}\right),$$

determinare i coefficienti a , b , c in modo che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Determinare il grado di precisione della formula trovata.

- 4) Studiare la convergenza, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}^+$ del metodo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{4},$$

per approssimare le radici dell'equazione non lineare $x^2 - 4x + 3 = 0$, indicando anche l'ordine di convergenza.

- 5) (*Solo per gli studenti con esame da 6 cfu*). Descrivere un procedimento a scelta per la costruzione del metodo di Eulero esplicito. Definire il concetto di assoluta stabilità di un metodo numerico per l'approssimazione di un problema di Cauchy e ricavare l'intervallo di assoluta stabilità del metodo di Eulero esplicito.