COMPLEMENTI DI MATEMATICA
PROVA SCRITTA
(13 giugno 2013)

1) Verificare se la funzione definita da

$$S(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x < 1 \\ 3x^2 - 3x + 1 & 1 \le x < 2, \\ -x^3 + 9x^2 - 15x + 9 & 2 \le x \le 3, \end{cases}$$

è una spline cubica naturale.

- $x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$
- $S\big|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_3 \quad \forall i = 1,2,3$

$S(1^-) = 1 \qquad S(1^+) = 1$

$S(2^-) = 12 - 6 + 1 = 7 \qquad S(2^+) = -8 + 36 - 30 + 9 = 7$

- $$S'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \ldots \\ 6x - 3 & \ldots \\ -3x^2 + 18x - 15 & \ldots \end{cases}$$

$S'(1^-) = 3 \qquad S'(1^+) = 6 - 3 = 3$

$S'(2^-) = 9 \qquad S'(2^+) = -12 + 36 - 15 = 9$

- $$S''(x) = \begin{cases} 6x \\ 6 \\ -6x + 18 \end{cases}$$

$S''(1^-) = 6 \qquad S''(1^+) = 6$

$S''(2^-) = 6 \qquad S''(2^+) = 6$

$S''(0) = 0$

$S''(3) = 0$

S è una spline cubica naturale

CREMA

13/6/2013

2) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^4$ e

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

2.1) Per quali valori di a la matrice è diagonalmente dominante?

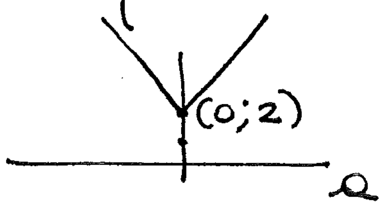
2.2) Calcolare $\|A\|_1$ e tracciarne un grafico al variare di a.

2.3) Costruire la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e trovare i valori di a per i quali $\|B_J\|_\infty < 1$.

2.4) Quale relazione sussiste fra la velocità di convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel? Motivare la risposta.

- 2.1) $\begin{cases} |a| > 2 \\ |a| > 1 \end{cases} \Rightarrow |a| > 2$

- 2.2) $\|A\|_1 = \max\{|a|+1, |a|+2\} = |a|+2$



- $B_J = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & & & 0 \\ & \frac{1}{a} & & \\ & & \frac{1}{a} & \\ 0 & & & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$

$\|B_J\|_\infty = \frac{2}{|a|} \qquad \frac{2}{|a|} < 1 \qquad |a| > 2$

- $\rho^2(B_J) = \rho(B_{GS})$

$R(B_{GS}) = 2R(B_J)$ (matrice 3-diagonale)

Crema

13/6/13

3) E' dato l'integrale definito:

$$I = \int_{-2}^{2} (4x^3 + 3x^2 - 2)\, dx.$$

Calcolare il valore esatto e confrontarlo con il valore approssimato ottenuto utilizzando la formula dei trapezi semplice e la formula di Cavalieri-Simpson semplice. Commentare i risultati ottenuti.

Stimare quanti sottointervalli di uguale ampiezza sono necessari affinchè l'errore assoluto relativo all'approssimazione con il metodo dei trapezi compositi sia inferiore a 10^{-4}.

$f(x) = 4x^3+3x^2-2 \qquad a=-2 \quad b=2 \qquad b-a=4$

Esatto:

$$I=\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2-2)\,dx = x^4+x^3-2x\Big|_{-2}^{2} = 16+8-4-(16-8+4) =$$
$$=20-12=8$$

$$I^T = \frac{4}{2}\left[f(-2)+f(2)\right] = 2\left(\cancel{-32}+12-2+\cancel{32}+12-2\right)=40$$

$$I^{CS} = \frac{4}{6}\left[f(-2)+4f(0)+f(2)\right] = \frac{2}{3}\left(-22-8+42\right) = 8$$

$I = I^{CS}$ poichè G. Prec. C.S. è 3

Stima asintotica $\qquad H = \dfrac{b-a}{M} = \dfrac{4}{M}$; $f'(x)=12x^2+6x$

$$\left|\frac{H^2}{12}\left(f'(-2)-f'(2)\right)\right| = \frac{1}{12}\left(\frac{4}{M}\right)^2 \left|48-12-(48+12)\right| =$$

$$\frac{1}{\cancel{12}}\cdot\frac{16}{M^2}\cdot\overset{2}{\cancel{24}} = \frac{32}{M^2} < 10^{-4}$$

$M^2 > 320000 \qquad \overline{M} = 566$