

COMPLEMENTI DI MATEMATICA
PROVA SCRITTA
(13 giugno 2013)

1) Verificare se la funzione definita da

$$S(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 3x^2 - 3x + 1 & 1 \leq x < 2, \\ -x^3 + 9x^2 - 15x + 9 & 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

è una spline cubica naturale.

2) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^4$ e

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

2.1) Per quali valori di a la matrice è diagonalmente dominante?

2.2) Calcolare $\|A\|_1$ e tracciarne un grafico al variare di a .

2.3) Costruire la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e trovare i valori di a per i quali $\|B_J\|_\infty < 1$.

2.4) Quale relazione sussiste fra la velocità di convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel? Motivare la risposta.

3) E' dato l'integrale definito:

$$I = \int_{-2}^2 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx.$$

Calcolare il valore esatto e confrontarlo con il valore approssimato ottenuto utilizzando la formula dei trapezi semplice e la formula di Cavalieri-Simpson semplice. Commentare i risultati ottenuti.

Stimare quanti sottointervalli di uguale ampiezza sono necessari affinché l'errore assoluto relativo all'approssimazione con il metodo dei trapezi composti sia inferiore a 10^{-4} .