COMPLEMENTI DI MATEMATICA
PROVA SCRITTA
(12 giugno 2014)

Crema

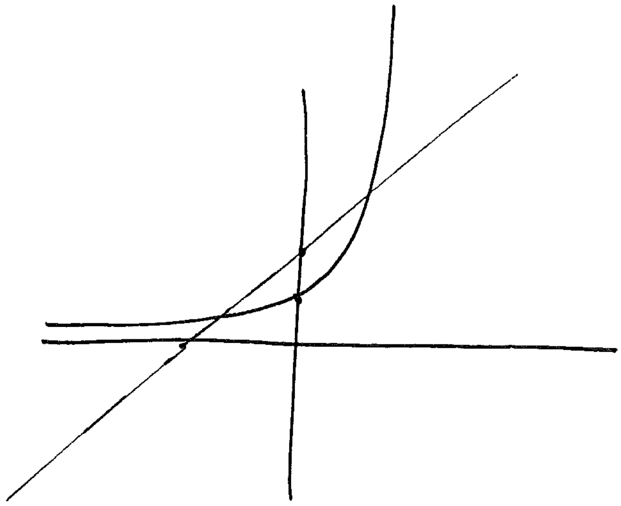
1) Verificare che l'equazione non lineare $f(x) = e^x - x - 2$ ha una radice $\alpha < 0$ e una radice $\beta > 0$. Trovare il numero di passi k del metodo di bisezione applicato all'intervallo $[1, 2]$ affinché l'iterata x_k verifichi la maggiorazione

$$|\beta - x_k| < 10^{-3}.$$

Dimostrare che il metodo di Newton converge a β in $I = [1, 2]$, $\forall x_0 \in I$. Posto $x_0 = 1$ calcolare l'iterata x_1 del metodo di Newton.

$$f(x) = e^x - x - 2$$

$$e^x = x + 2$$



x	e^x	$x+2$
-2	e^{-2}	> 0
-1	e^{-1}	< 1
0	1	< 3
1	e	< 3
2	e^2	> 4

$\alpha \in (-2; -1)$

$\beta \in (1; 2)$

$$\frac{2-1}{2^k} < \frac{1}{1000} \qquad 2^k > 1000 \qquad \bar{k} = 10$$

- $f(1) = e - 3 \cong -0.2817$

  $f(2) = e^2 - 4 \cong 3.38$

- $f' = e^x - 1 > 0 \quad x > 0 \qquad f'(x) > 0 \quad x \in [1, 2]$

- $f'' = e^x > 0 \quad \forall x$

$$\frac{|f(1)|}{|f'(1)|} = \frac{0.2817}{1.718} < 1 \qquad \frac{|f(2)|}{|f'(2)|} = \frac{3.38}{6.38} < 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-0.2817\ldots}{1.718\ldots} \cong 1.1639697\ldots$$

2) Verificare che la funzione definita da

$$S(x) = \begin{cases} -(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) & -1 \leq x < 0 \\ x^3 - x^2 + 4x + 4 & 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

è una spline cubica. Dire se naturale.

Crema

12.6.2014

$S(0^-) = -1 + 2 + 3 = 4$

$S(0^+) = 4$

$$S'(x) = \begin{cases} -3(x+1)^2 + 4(x+1) + 3 \\ 3x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

$S'(0^-) = -3 + 4 + 3 = 4$

$S'(0^+) = 4$

$$S''(x) = \begin{cases} -6(x+1) + 4 \\ 6x - 2 \end{cases}$$

$S''(0^-) = -2$

$S''(0^+) = -2$

$S''(-1) = 4 \neq 0$ non è naturale

3) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Crema

12. 6. 2014

3.1) Per quali valori di a la matrice A è diagonalmente dominante?

3.2) Per quali valori di a la matrice A è non singolare?

3.3) Costruire la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e trovar i valori di a per i quali $\|B_J\|_\infty < 0.8$.

3.4) Per quali valori di a il metodo di Jacobi applicato al sistema converge

3.5) Per quali valori di a il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistem converge?

3.6) Quale relazione sussiste fra la velocità di convergenza dei metodi c Jacobi e di Gauss-Seidel? Motivare la risposta.

3.1) $\begin{cases} |a| > 1 \\ |a| > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |a| > 1$

3.2) $\det A = a(a^2 - 1) \neq 0$ $\qquad a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1$

3.3)
$$B_J = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|B_J\|_\infty = \frac{1}{|a|} < 0.8$ $\qquad |a| > \frac{1}{0.8} = \frac{5}{4}$

3.4)
$$\begin{bmatrix} \lambda a & 0 & 1 \\ 0 & \lambda a & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \lambda a \end{bmatrix} = \lambda a(\lambda^2 a^2 - 1) = 0 \qquad \lambda = 0 \quad \lambda = \pm \frac{1}{a}$$

J conv $\Leftrightarrow$ $|a| > 1$ $\qquad \rho(B_J) = \frac{1}{|a|}$

3.5)
$$\begin{vmatrix} \lambda a & 0 & 1 \\ 0 & \lambda a & \frac{1}{2} \\ \lambda & 0 & \lambda a \end{vmatrix} = \lambda a(\lambda^2 a^2 - \lambda) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 0$$

$\lambda_3 = \frac{1}{a^2}$ $\quad \rho(B_{GS}) = \frac{1}{a}$

GS conv $\Leftrightarrow$ $|a| > 1$

$\rho(B_{GS}) = \frac{1}{a^2} \Rightarrow R(B_{GS}) = -\ln \frac{1}{a^2} = -2 \ln \frac{1}{|a|} = 2 R(B_J)$

$\left[R(B_J) = -\ln \frac{1}{|a|} \right]$

GS ha velocità doppia rispetto a J.