COMPLEMENTI DI MATEMATICA - PROVA MATLAB - 16 Luglio 2013

1) Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2002 \\ 2004 \\ 2004 \\ 2004 \\ 2004 \\ 2002 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $a = 1001$. Calcolare il numero di condizionamento $K_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$, e confrontarlo al variare di $\varepsilon = 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3}$ con

$$K_\varepsilon(A) = \frac{\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}}{\frac{\|A-A_\varepsilon\|_2}{\|A\|_2}},$$

essendo $\mathbf{x}_\varepsilon$ la soluzione del sistema perturbato $A_\varepsilon \mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{f}$, dove $(A_\varepsilon)_{32} = (A_\varepsilon)_{23} = (A_\varepsilon)_{54} = (A_\varepsilon)_{45} = 2 + \varepsilon,\ (A_\varepsilon)_{ij} = A_{ij}$ altrove.

Risultati: $K_2(A) =$

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$K_\varepsilon(A)$			

2) Sia p_4 il polinomio di grado 4 che interpola $p_6(x) = 4x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 4$ in 5 nodi equispaziati dell'intervallo $[-2, 2]$ e siano $p_3 = p_4'$ e $p_5 = p_6'$. Per trovare p_4 si utilizzi il comando MATLAB `polyfit`. Calcolare gli errori

$$err_1 = \frac{\|p_6 - p_4\|_\infty}{\|p_6\|_\infty},\ err_2 = \frac{\|p_5 - p_3\|_\infty}{\|p_5\|_\infty},$$

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le j\le 200} |f(z_j)|,\ z_j = -2 + \frac{1}{50}j,\ j = 0, ..., 200.$$

Risultati: $err_1 =$ $\qquad$ $err_2 =$

3) Si consideri il metodo iterativo $x_{n+1} = g_p(x_n),\ n \ge 0,\ g_p(x) = x(2 - px)$, per l'approssimazione di $\alpha = \frac{1}{p}$ punto fisso di g_p, con $p = \frac{1}{2}$ e $x_0 = \frac{3}{2p}$. Sia N il numero di iterazioni per cui si ha $|x_N - \alpha| \approx \underbrace{\left[\frac{|x_N - x_{N+1}|}{|1 - g_p'(x_N)|}\right]}_{e_N} < 10^{-8}$.

Si calcoli $r_N = \frac{x_{N+1}-\alpha}{(x_N-\alpha)^2}$ e si confronti il risultato ottenuto con $\frac{1}{2}g_p''(\alpha)$. Riportare i valori richiesti e commentare i risultati ottenuti.

$N =$ $\qquad$ $x_N =$ $\qquad$ $e_N =$

$r_N =$ $\qquad$ $\frac{1}{2}g_p''(\alpha) =$

COMMENTO