

COMPLEMENTI DI MATEMATICA
PROVA SCRITTA
(16 luglio 2013)

1) Si vuole approssimare la radice maggiore α della funzione $f(x) = x - e^{x-3}$.
Si dimostri che il metodo di Newton converge ad α per ogni scelta del
valore iniziale $x_0 \in [4, 5]$.

2) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

2.1) Per quali valori di a la matrice è diagonalmente dominante?

2.2) Per quali valori di a la matrice è definita positiva?

2.3) Calcolare $\|A\|_1$ e tracciarne un grafico al variare di a .

2.4) Per quali valori di a il metodo di Jacobi converge?

2.5) Costruire la matrice di iterazione B_{GS} del metodo di Gauss-Seidel e
trovare per quali valori di a il metodo è convergente.

2.6) Quale relazione sussiste fra la velocità di convergenza dei metodi di
Jacobi e di Gauss-Seidel? Motivare la risposta.

3) Determinare il grado di precisione della formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Applicare la formula per approssimare l'integrale definito

$$\int_0^1 \left(e^x + \frac{1}{2} \right) dx$$

e calcolare l'errore commesso.