RISULTATI DEGLI ESERCIZI SUI SISTEMI LINEARI

TEMI D'ESAME DEI CORSI TENUTI PRESSO IL DTI DI CREMA

15 giugno 2005 - n. 2

I metodi di Jacobi e GS sono entrambi convergenti.

18 luglio 2005 - n. 2

I due metodi convergono $\Leftrightarrow a > 1$; $R(B_{GS}) = 2R(B_J)$ (matrice tridiagonale).

8 settembre 2005 - n. 3

$\beta \neq 1$; $B_J = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, (non convergente); $B_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -7/4 & 0 \end{pmatrix}$, (convergente).

7 novembre 2005 - n. 2

$\alpha > \sqrt{2}$; 2.2) $|\alpha| > 2$; 2.3)-2.4) $|\alpha| > \sqrt{2}$.

26 gennaio 2006 - n. 2

2.1) $\alpha > \sqrt{3/2}$;
2.2) $|\alpha| > 1/2$;
2.3)-2.4) $|\alpha| > \sqrt{3/2}$.

16 giugno 2006 - n. 2

2.1) $\alpha \neq 0$; 2.2) $\quad B_J = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|B_J\|_\infty = |\alpha| + 1; \quad$ 2.3) $\; -2 < \alpha < 0$.

18 luglio 2006 - n. 2

2.1) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$, 2.2) $\forall \alpha$; 2.3) $\|A\|_\infty = \alpha^2 + |\alpha| + 1$;

2.4) converge $\forall \alpha$, essendo $\rho(B_J) = \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\alpha_2 + 1}} < 1, \ \forall \alpha$.

6 settembre 2006 - n. 1

1.1) $\det(A) = 2\alpha\beta + 1 \neq 0$, vero grazie all'ipotesi $\alpha, \beta > 0$;
1.2) $\alpha > 1 \ \wedge \ \beta > 1/2$;

1.3) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4\alpha} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2 \\ 0 & \beta + \frac{1}{2\alpha} \end{pmatrix}$, 1.4) $B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{2\beta} & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha > 1 \wedge \beta > 1/2$.

31 ottobre 2006 - n. 4

4.1) $\alpha\beta \neq 1/2$;
4.2) $\alpha\beta > 1/2$;

$$4.3) \ B_J = -\begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha \\ 1/2\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \|B_J\|_1 = \max\{1/\alpha, 1/2\beta\}; \quad \alpha\beta > \frac{1}{2}.$$

24 gennaio 2007 - n. 4

La matrice è non singolare grazie all'ipotesi $a > 0$, essendo $\det A = a$.
4.1) Si deve verificare (mediante i prodotti di matrici righe per colonne) che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$;
4.2) $\|A\|_\infty = 1 + a$; $\|A^{-1}\|_\infty = \max\{1, 2/a\}$; $K_\infty(A) = (1 + a)\max\{1, 2/a\} = \{(1 + a)$, se $a > 2$, $(1 + a)2/a$, se $a < 2\}$;
4.3) $\|A\|_1 = \max\{2, a\}$; $\|A^{-1}\|_1 = 1 + 1/a$; $K_1(A) = \max\{2, a\}(1 + 1/a) = \{(1 + a)$, se $a > 2$, $(1 + a)2/a$, se $a < 2\}$.

12 aprile 2007 - n. 4

4.1) $\|A\|_1$=$\max\{3, 3a^2\} = \{3$, se $-1 \leq a \leq 1$; $3a^2$, se $|a| \geq 1\}$.
4.2) $\|A\|_\infty = \max\{2, 2 + a^2, 1 + 2a^2\} = \{2 + a^2$, se $-1 \leq a \leq 1$; $1 + 2a^2$, se $|a| \geq 1\}$.
4.3) Il metodo di Jacobi non converge essendo $\rho(B_J) = \sqrt{1.5}$.

14 giugno 2007 - n. 2

2.1) $a \neq 1 \wedge a \neq -2$; 2.2) $\|A\|_\infty = a$+2; $a = 2$; 2.3) $0 < a < 1$.

16 luglio 2007 - n. 2

2.a) $\alpha \neq \pm 1$; 2.b) $|\alpha| > 1$; 2.c) $\|A\|_\infty = \max\{|\alpha|+1, 6\}$, $|\alpha| = 9$; 2.d), 2.e) $|\alpha| > 1$.

4 settembre 2007 - n. 2

2.2) $\|A\|_\infty = 4+\dfrac{2}{n}$; $n = 8$; 2.3) $B_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/8 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\|B_J\|_\infty = 1/2$.

7 novembre 2007 - n. 4

4.1) $\mathbf{x}^{(1)} = [4/5, -2/5, -1]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [27/25, -2/25, -23/25]^T$;
4.2) $B_J = [0, 1/5, 1/5; -2/5, 0, 0; 0, 1/5, 0]$, $\|B_J\|_\infty = 2/5$.

29 gennaio 2008 - n. 3

3.1) $\alpha \neq \pm 2$;
3.2) $|\alpha| < 1$;
3.3)-3.4) $|\alpha| < 2$.

13 febbraio 2008 - n. 3

$\det(A) = 1+\alpha^2 \neq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $B_J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha - 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\|B_J\|_\infty = \|B_J\|_1 = 1$

10 aprile 2008 - n. 3

$\|A\|_1 = 4 + 2|a|$;
$\|A\|_\infty = \max\{4 + |a|, 2 + 2|a|\} = \{4 + |a|, \text{ se } |a| \leq 2, 2 + 2|a|, \text{ se } |a| \geq 2\}$;
3.1) $a \neq \pm 2$;
3.2) $|a| < 1$.

4 giugno 2008 - n. 2

2.1) $\alpha \neq \pm 1$; 2.2) $|\alpha| > 2$; 2.3$-$2.4) $|\alpha| > 1$;

2.5) $B_J = \begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\alpha & 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\|B_J\|_\infty = \dfrac{2}{|\alpha|}$; $|\alpha| > 2$.

16 luglio 2008 - n. 2

2.1) $\alpha \neq \pm 1$; 2.2) $|\alpha| < 1$; 2.3) $B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11 settembre 2008 - n. 2

2.1) $a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1$; 2.2) $|a| > 2$; 2.3), 2.4), 2.5) $a > 1$.

20 ottobre 2008 - n. 2

2.1) $a \neq \pm 2$; 2.2-3) $|a| < 2$; 2.4) $a = \pm 3$.
2.5) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ 0 & \frac{a^2}{2} - 2 \end{pmatrix}$.

14 gennaio 2009 - n. 2

2.1) $\det A = 2(1 + \alpha_2) \neq 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2.2) $\rho(B_J) = |\alpha|; \ |\alpha| < 1$.

$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\|B_J\|_1 = |\alpha| + \dfrac{1}{2} = 5 \iff \alpha = \pm \dfrac{9}{2}$.

2.3)$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

18 febbraio 2009 - n. 3

3.1) $a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1$; 3.2) $|a| > \sqrt{2}$; 3.3), 3.4) $|a| > 1$.

17 aprile 2009 - n. 3

3.1) $a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; 3.2) $|a| < \frac{1}{2}$; 3.3-4) $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$. $R(B_{GS}) = 2R(B_J)$.

16 luglio 2009 - n. 2

2.1) $a \neq \pm 1$; 2.2) $|a| > 1$; 2.3-4) $|a| > 1$. $R(B_{GS}) = 2R(B_J)$.

4 settembre 2009 - n. 2

A è d. p. se $\frac{3}{2} < a < 2$. A è d.d. se $|a| < 1$. $\|A\|_\infty = \max\{|a| + 3, 6\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$