CALCOLO NUMERICO (2 maggio 2006)

Prima prova in itinere - Tema A

1) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \alpha \leq -1, \ \alpha \neq -4$$

Si calcoli il condizionamento $K_1(A)$ in funzione del parametro α. Si indichi per quali valori di α si ha $K_1(A) = 8$.

Fissato poi $\alpha = -2$, siano $\mathbf{b} = (4\ 0)^T$, $\overline{\mathbf{b}} = (4\ 2)^T$. Si calcolino $\mathbf{x}$ e $\overline{\mathbf{x}}$, soluzioni rispettivamente di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ e si mostri che

$$\frac{\|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} \leq K_1(A) \frac{\|\mathbf{b} - \overline{\mathbf{b}}\|_1}{\|\mathbf{b}\|_1}$$

2) Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{-x} & x < 0 \\ \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3} & x \geq 0 \end{cases}$$

che ha un punto fisso in $x = 1$. La funzione ha altri punti fissi?

Si studi graficamente la convergenza del metodo iterativo

$$x_{k+1} = g(x_k) \ .$$

Si indichi anche l'ordine di convergenza del metodo.

3) Descrivere il procedimento per ottenere il metodo iterativo di Gauss-Seidel e costruire la matrice di iterazione associata. Discutere la convergenza.

4) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*)

4.1) Determinare il numero e il segno delle radici reali del polinomio $p_4(x) = x^4 - x^3 - x - 1$.

4.2) Descrivere il metodo di Newton-Hörner per il calcolo delle radici di un generico polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$.

CALCOLO NUMERICO (2 maggio 2006)

Prima prova in itinere - Tema B

1) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \alpha \leq -1, \ \alpha \neq -4$$

Si calcoli il condizionamento $K_\infty(A)$ in funzione del parametro α. Si indichi per quali valori di α si ha $K_\infty(A) = 8$.

Fissato poi $\alpha = -2$, siano $\mathbf{b} = (4\ 2)^T$, $\overline{\mathbf{b}} = (4\ 0)^T$. Si calcolino $\mathbf{x}$ e $\overline{\mathbf{x}}$, soluzioni rispettivamente di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ e si mostri che

$$\frac{\|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq K_\infty(A) \frac{\|\mathbf{b} - \overline{\mathbf{b}}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$

2) Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} & x < 0 \\ \\ -\frac{2}{3}e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

che ha un punto fisso in $x = -1$. La funzione ha altri punti fissi?

Si studi graficamente la convergenza del metodo iterativo

$$x_{k+1} = g(x_k) \ .$$

Si indichi anche l'ordine di convergenza del metodo.

3) Descrivere il procedimento per ottenere il metodo iterativo di Jacobi e costruire la matrice di iterazione associata. Discutere la convergenza.

4) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*)

4.1) Determinare il numero e il segno delle radici reali del polinomio $p_6(x) = x^6 + 2x^5 + 3x - 1$.

4.2) Descrivere il metodo di Newton-Hörner per il calcolo delle radici di un generico polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$.