CALCOLO NUMERICO (24 aprile 2007)

Prima prova in itinere - Tema A

1) Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$g(x) = \begin{cases} x^{3/2} + \frac{x}{2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{9} - (x + \frac{1}{3})^2 & x < 0 \ . \end{cases}$$

e il metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k),\ x_0$ assegnato:

1.1) si studi graficamente la convergenza del metodo al variare del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$, indicando, eventualmente, anche l'ordine di convergenza;

1.2) si calcoli il condizionamento $K(x)$ della funzione g per i valori positivi di x. Si mostri che tale numero di condizionamento è compreso in un intervallo (a, b), indicando i valori di a e b.

2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0 :$$

2.1) calcolare $\|A\|_2$ e tracciarne il grafico al variare di α;

2.2) indicare per quali valori di α il metodo di Jacobi è convergente;

2.3) indicare per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel è convergente;

2.4) calcolare la fattorizzazione LU della matrice A e le quantità $\|L\|_\infty$ e $\|U\|_\infty$, al variare di α.

3) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*)

Descrivere il metodo iterativo SOR e dimostrare che $0 < \omega < 2$ è una condizione necessaria per la convergenza del metodo.

CALCOLO NUMERICO (24 aprile 2007)

Prima prova in itinere - Tema B

1) Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$g(x) = \begin{cases} x^{3/2} + \frac{x}{3} & x \geq 0 \\ \frac{1}{4} - (x + \frac{1}{2})^2 & x < 0\ . \end{cases}$$

e il metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k),\ x_0$ assegnato:

1.1) si studi graficamente la convergenza del metodo al variare del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$, indicando, eventualmente, anche l'ordine di convergenza;

1.2) si calcoli il condizionamento $K(x)$ della funzione g per i valori positivi di x. Si mostri che tale numero di condizionamento è compreso in un intervallo (a, b), indicando i valori di a e b.

2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0 :$$

2.1) calcolare $\|A\|_2$ e tracciarne il grafico al variare di β;

2.2) indicare per quali valori di β il metodo di Jacobi è convergente;

2.3) indicare per quali valori di β il metodo di Gauss-Seidel è convergente;

2.4) calcolare la fattorizzazione LU della matrice A e le quantità $\|L\|_\infty$ e $\|U\|_\infty$, al variare di β.

3) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*)

Descrivere il metodo iterativo SOR e dimostrare che $0 < \omega < 2$ è una condizione necessaria per la convergenza del metodo.