CALCOLO NUMERICO (28 aprile 2008)
Prima prova in itinere - Tema A

1) Dati dall'utente una funzione `inline` $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la sua derivata `inline` df, un punto iniziale x_1, una tolleranza TOL e un numero massimo di iterazioni *NMAX*, si scriva un codice MATLAB che implementi la seguente procedura:

   – applichi il metodo di Newton con punto iniziale x_1;

   – si arresti qualora si sono operate $NMAX$ iterazioni oppure si verifica il test di arresto: $|f(x_k)| < TOL$;

   – il metodo deve restituire alla fine un vettore che contiene come componente k-esima la iterata $k-$esima x_k.

2) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione $f(x) = 2e^{x^2}$ e stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 50$.

3) Si vuole approssimare l'unica radice reale α dell'equazione non lineare $f(x) := x^3 - 8 = 0$.

   3.1) Dimostrare che il metodo di Newton converge ad α, $\forall x_0 \in [1, 4]$.

   3.2) Dopo aver espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discutere graficamente la convergenza del metodo iterativo di punto fisso al variare di $x_0 > 0$ e stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

4) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 1 :$$

   4.1) calcolare la fattorizzazione LU della matrice A e, dopo aver calcolato le quantità $\|A\|_\infty$, $\|L\|_\infty$ e $\|U\|_\infty$ in funzione di α, verificare che risulta $\|A\|_\infty < \|L\|_\infty \|U\|_\infty$;

   4.2) verificare che il metodo di Jacobi è convergente;

   4.3) si consideri la decomposizione di $A = M - N$, con

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

   per approssimare la soluzione $\mathbf{x}$ con il metodo iterativo

$$(**) \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}, \quad P = M^{-1}N.$$

   Ricavare le matrici N e P, e verificare che il metodo iterativo $(**)$ è convergente.

CALCOLO NUMERICO (28 aprile 2008)
Prima prova in itinere - Tema B

1) Dati dall'utente una funzione `inline` $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la sua derivata `inline` df, un punto iniziale x_1, una tolleranza TOL e un numero massimo di iterazioni $NMAX$, si scriva un codice MATLAB che implementi la seguente procedura:

   – applichi il metodo di Newton con punto iniziale x_1;
   – si arresti qualora si sono operate $NMAX$ iterazioni oppure si verifica il test di arresto: $|f(x_k)| < TOL$;
   – il metodo deve restituire alla fine un vettore che contiene come componente k-esima la iterata $k-$esima x_k.

2) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione $f(x) = e^{2x^2}$ e stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 100$.

3) Si vuole approssimare l'unica radice reale α dell'equazione non lineare $f(x) := x^3 - 27 = 0$.

   3.1) Dimostrare che il metodo di Newton converge ad α, $\forall x_0 \in [2, 4]$.
   3.2) Dopo aver espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discutere graficamente la convergenza del metodo iterativo di punto fisso al variare di $x_0 > 0$ e stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

4) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \frac{4}{\alpha} \\ 0 & 4 & 0 \\ \frac{4}{\alpha} & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 2:$$

   4.1) calcolare la fattorizzazione LU della matrice A e, dopo aver calcolato le quantità $\|A\|_\infty$, $\|L\|_\infty$ e $\|U\|_\infty$ in funzione di α, verificare che risulta $\|A\|_\infty < \|L\|_\infty \|U\|_\infty$;
   4.2) verificare che il metodo di Gauss-Seidel è convergente;
   4.3) si consideri la decomposizione di $A = M - N$, con

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

   per approssimare la soluzione $\mathbf{x}$ con il metodo iterativo

$$(**) \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}, \quad P = M^{-1}N.$$

   Ricavare le matrici N e P, e verificare che il metodo iterativo $(**)$ è convergente.