CALCOLO NUMERICO (28 aprile 2009) - **Prima prova in itinere**

1) Si supponga che sia memorizzata in MATLAB la matrice quadrata `A` di dimensione `n` e le matrici `L` e `U` tali che valga la fattorizzazione senza pivot `A` $=$ `L` $*$ `U`. Si scriva una function MATLAB che ne calcoli l'inversa senza utilizzare il comando `inv(A)`, e, nel caso in cui `A` sia singolare restituisca un messaggio di errore.

2) Studiare il condizionamento del problema del calcolo di $f(x) = \|A\|_2$, al variare di $x \in \mathbb{R}$, con
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -x \\ x & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti
$$g(x) = \begin{cases} 1 - (x-1)^2 & x < 1 \\ \dfrac{1}{e}e^x - (x-1) & x \geq 1 \end{cases}$$

3.1) la funzione g è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

3.2) studiare la convergenza del metodo $x_{n+1} = g(x_n),\ n \in \mathbb{N}$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$, indicando anche l'ordine.

4) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \neq 0 :$$

4.1) indicare per quali valori di a il metodo di Jacobi è convergente;

4.2) si consideri la decomposizione di $A = N - P$, con N matrice diagonale di elementi $N_{ii} = \frac{a}{2},\ i = 1, 2, 3$, e il metodo iterativo
$$(**) \quad \mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + N^{-1}\mathbf{b}, \quad B = N^{-1}P;$$
ricavare le matrici $N,\ P$ e B, e verificare che il metodo iterativo $(**)$ non è convergente;

4.3) nel caso particolare $a = 4$, $\mathbf{x}_0 = [0\ 0\ 0]^T$, stimare il numero minimo di iterazioni del metodo di Jacobi affinchè l'errore relativo soddisfi
$$\frac{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||_2}{||\mathbf{x}||_2} < 10^{-4} .$$