

CALCOLO NUMERICO 1 (28 aprile 2011)

1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

- 1.1) calcolare $\det(A)$ e stabilire per quali valori di a la matrice A è non singolare;
- 1.2) determinare per quali valori di a i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, e stabilire la relazione tra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi;
- 1.3) nel caso $a = 2$ calcolare la fattorizzazione LU e le quantità $\|L\|_\infty$ e $\|U\|_\infty$.

2) Studiare il condizionamento del calcolo della radice maggiore dell'equazione

$$x^2 - 2x + c = 0,$$

al variare di $c \in (-\infty, 1)$.

3) Utilizzando la stima classica o la stima asintotica dell'errore, trovare quanti sottointervalli di uguale ampiezza sono necessari per approssimare l'integrale definito

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

con la formula dei trapezi composti, in modo da commettere un errore minore di 10^{-3} .

4) Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e la funzione $f(x) = \cos \frac{\pi}{3}x$,

- 4.1) determinare il polinomio $p_1(x)$ di grado 1, che interpola la funzione f nei nodi x_0 e x_1 e successivamente il polinomio $p_2(x)$ di grado 2, che interpola la funzione f nei nodi x_0 , x_1 e x_2 ;
- 4.2) stimare gli errori di interpolazione

$$\max_{x \in [0,3]} |f(x) - p_1(x)|, \quad \max_{x \in [0,3]} |f(x) - p_2(x)|.$$

5) Si consideri il problema della ricerca delle radici di un'equazione non lineare tramite il metodo $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \geq 0$, con x_0 opportuno. Dare la definizione di ordine di convergenza e illustrare la relazione che lega l'ordine di convergenza alle derivate della funzione g .