

CALCOLO NUMERICO 1 (26 Aprile 2012)

- 1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice 3×3 di elementi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0 :$$

- 1.1) studiare la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel;
1.2) nel caso $\alpha = \frac{1}{4}$ calcolare la fattorizzazione $A = LU$.

- 2) Studiare convergenza e l'eventuale ordine di convergenza dei seguenti metodi iterativi

$$x_{n+1} = e^{(x_n/4)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n e^{-x_n/4} - 1)}{e^{-x_n/4}(1 - x_n/4)},$$

con $x_0 \in [0, 2]$, per la ricerca dello zero della funzione $f(x) = x e^{-x/4} - 1$.

- 3) Trovare una formula di quadratura numerica Q per valutare il seguente integrale

$$I = \int_0^\pi x \sin(x) dx$$

a meno di un errore $|I - Q| \leq 10^{-2}$.

- 4) Calcolare a , b , c , d in modo che la funzione definita da

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3 & 0 \leq x < 1 \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

sia una spline cubica naturale.

- 5) Trovare e dimostrare una stima classica dell'errore per la formula di quadratura composita del punto medio.