Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: __________

Laboratorio di Calcolo Numerico - Corso di Laurea in Matematica
Appello d'esame del 26/04/2012

ESERCIZIO 1 [10 punti]

Si consideri il calcolo dell'integrale

$$I = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx,$$

dove m, n sono due interi non negativi.

1. Si calcoli l'errore commesso approssimando I, rispettivamente, con il metodo dei trapezi semplice e di Simpson semplice per le coppie (m, n) indicate nella seguente tabella

m	n	$\lvert I - I_{tr}\rvert$	$\lvert I - I_{Simp}\rvert$
2	0		
1	1		
0	2		
2	2		

2. Si dia una spiegazione dei risultati ottenuti in ciascun caso proposto.
3. Si consideri ora la coppia $(m, n) = (2, 2)$ e si determini sperimentalmente il numero minimo di intervalli necessario per approssimare I con un errore inferiore a 10^{-5} con i metodi dei trapezi composito e di Simpson composito.

- spiegazione risultati al punto 1.

- nr. intervalli: trapezi Simpson

ESERCIZIO 2 [10 punti]

Sia `A=hilb(3)`. Si calcolino con l'opportuno comando Matlab i fattori L e U di A e si scriva esplicitamente tale fattorizzazione (attenzione alla matrice di permutazione!). Si usino quindi tali fattori per:

- calcolare l'inversa di A
- calcolare il determinante di A *senza* fare uso del comando `det` o dell'espressione esplicita del determinante di una matrice (Suggerimento: si ricordi il teorema di Binet sulle proprietà dei determinanti e si osservi che la matrice di permutazione è ortogonale e L, U sono triangolari)

- fattorizzazione LU

- $A^{-1} =$

- $\det(A) =$

ESERCIZIO 3 [10 punti]

Si consideri la funzione
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + (x-1)^2$$
nell'intervallo $[-2, 2]$ e siano α_1 e α_2, con $\alpha_1 < \alpha_2$, i suoi zeri in tale intervallo.

1. Si applichi il metodo di Newton per l'approssimazione di α con le scelte successive `xv=[-0.5,0.5,1.5], toll=1e-6, nmax=300` e si indichi quale è l'ordine di convergenza per ciascun valore di `xv` considerato.
2. Si dia una spiegazione dei risultati al punto sopra.
3. Si consideri ora il metodo di bisezione con `toll=1e-6, nmax=300` e partendo dagli estremi $a = -2, b = 2$. Quale zero viene approssimato? Perché?

- zeri trovati e ordine di convergenza di Newton

- spiegazione comportamento Newton

- zero trovato con bisezione e spiegazione

Appello 26/04/2012 - Soluzione

Calcoliamo il valore esatto dell'integrale per ciascuna coppia (m, n) usando il toolbox simbolico (anche se non è necessario!)

```
>>esp=sym([2 1 0 2; 0 1 2 2]); syms x
>> for i=1:4, I(i)=int(x^esp(1,i)*(1-x)^esp(2,i),'x',0,1), end
```

Calcoliamo ora l'approssimazione dell'integrale con trapezi e Simpson semplice

```
>>esp=[2 1 0 2; 0 1 2 2];
>> x=[0 1];
>> fun=inline(x,(x.^m).*(1-x).^n,'x','m',n');
>> for i=1:4, m=esp(1,i); n=esp(2,i); Itr(i)=trapz(x,fun(x)); end
>> for i=1:4, m=esp(1,i); n=esp(2,i); ICS(i)=cav simpson(fun,0,1,1); end
```

Otteniamo quindi la seguente tabella di risultati:

m	n	$\lvert I - I_{tr}\rvert$	$\lvert I - I_{Simp}\rvert$
2	0	1/6	0
1	1	1/6	0
0	2	1/6	0
2	2	1/30	1/120

Tali risultati trovano spiegazione nel fatto che il metodo dei trapezi ha grado di esattezza pari a 1 mentre quello di Simpson pari a 3. Calcoliamo ora con un semplice codice il numero minimo di intervalli richiesti da trapezi composito e Simpson composito per approssimare l'integrale con un errore inferiore a 10^{-5}.

```
>> fun=inline('x.^2.*(1-x).^2','x');
>> toll=1e-5;
>> I=1/30;
>> err=1+toll; m=1;
     while(err>toll), x=linspace(0,1,m+1);
             Itr=trapz(x,fun(x)); err=abs(I-Itr); m=m+1;
     end
>> m-1

ans =

     8  % trapezi

>> err=1+toll; m=1;
     while(err>toll), x=linspace(0,1,m+1);
             Is=simpcomp(fun,0,1,m); err=abs(I-Is); m=m+1;
     end
>> m-1
```

```
ans =

     6 % Simpson
```

Esercizio 2.

Calcoliamo la fattorizzazione LU di A con il comando `lu`.

```
A=hilb(3);
[L,U,P]=lu(A)
```

Osserviamo che la fattorizzazione calcolata è tale che

$$PA = LU,$$

ovvero abbiamo la presenza di una matrice di permutazione P. Calcoliamo quindi l'inversa di A tramite la risoluzione di tre sistemi lineari con medesima matrice dei coefficienti e diverso termine noto

```
bz=zeros(3,1); Ai=zeros(3);
for i=1:3, b=bz; b(i)=1; y=forwsub(L,P*b); x=backsub(U,y); Ai(:,i)=x; end
```

Per il calcolo del derminante di A, osserviamo che

$$PA = LU \to A = P^{-1}LU \to A = P^T LU$$

e per il teorema di Binet

$$\det(A) = \det(P^T)\det(L)\det(U).$$

Per quanto riguarda il determinante di P^T, ricordiamo che $\det(P^T) = \det(P)$ e che se si scambiano due colonne di una matrice il suo det cambia di segno. Ora se scambiamo la seconda e la terza colonna, otteniamo esattamente la matrice identità, quindi abbiamo che $\det(P^T) = \det(P) = -1$. Inoltre, il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi della sua diagonale principale. Poiché L ha tutti 1 sulla diagonale principale, il suo determinante è =1, mentre possiamo calcolare il determinante di U con i comandi `prod(diag(U))=-4.6296e-004`. In conclusione, abbiamo che

$$\det(A) = -\det(U) = 4.6296 \cdot 10^{-4}$$

Tale risultato chiaramente coincide con quello che si ottiene dal comando `det(A)`.

Esercizio 3. Approssimiamo gli zeri con il metodo di Newton partendo dai valori di innesco suggeriti. Otteniamo

```
>>fun=inline('x.^3-2*x.^2+x+(x-1).^2','x');
>>dfun=inline('3*x.^2-4*x+1+2*(x-1)','x');
>> toll=1e-6; nmax=300;
>>a1=-1; a2=1;

% xv=-1.5
>>[x,iter]=newton(fun,dfun,-1.5,toll,nmax);
>> [abs(x(2:end)-a1)./abs(x(1:end-1)-a1).^2]'
% converge ad alpha1 con ordine 2

% xv=0.5
>>[x,iter]=newton(fun,dfun,0.5,toll,nmax);
>> [abs(x(2:end)-a2)./abs(x(1:end-1)-a2).^2]'
>> [abs(x(2:end)-a2)./abs(x(1:end-1)-a2)]'
% converge ad alpha2 con ordine 1

% xv=1.5
>>[x,iter]=newton(fun,dfun,1.5,toll,nmax);
>> [abs(x(2:end)-a2)./abs(x(1:end-1)-a2).^2]'
>> [abs(x(2:end)-a2)./abs(x(1:end-1)-a2)]'
% converge ad alpha2 con ordine 1
```

Il comportamento osservato è in accordo con il fatto che α_1 è uno zero semplice mentre α_2 è uno zero doppio. Utilizziamo ora il metodo di bisezione

```
[x,N]=bisezione(fun,-2,2,toll);
x(end)
ans =

   -1.0000
```

Viene approssimata la radice α_1 in quanto essa è l'unica per cui sono correttamente verificate le ipotesi di applicabilità del metodo di bisezione, in particolare il cambio di segno della funzione agli estremi dell'intervallo di bisezione.