Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 11 aprile 2014

1) È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con:

$$a_{ii} = n,\ i = 1, ..., n;\ a_{ij} = -1,\ i \neq j;\ f_i = 2,\ i = 1, ..., n.$$

Utilizzando $n = 40$ si calcoli la fattorizzazione $A = LU$ e si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \alpha U)\mathbf{x}^{(k)} + \alpha L^{-1}\mathbf{f},$$

dove L e U sono le matrici ottenute con la fattorizzazione.

Trovare numericamente il valore ottimale α_{ott} che minimizza il raggio spettrale $\rho(B_\alpha)$ al variare di $\alpha \in [0.01 : 0.001 : 0.05]$, dove B_α è la matrice di iterazione associata al metodo iterativo.

Approssimare la soluzione con il metodo iterativo dato utilizzando $\alpha = \alpha_{\text{ott}}$, ${x_i}^{(0)} = \frac{i}{n}$, $i = 1, ..., n$ e test d'arresto $\|A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2 < 10^{-8}$. Sia k_{ott} il numero di iterazioni eseguite.

RISULTATI

$\alpha_{\text{ott}} =$ $\qquad$ $\rho(B_{\alpha_{\text{ott}}}) =$ $\qquad$ $k_{\text{ott}}=$

2) Si considerino gli integrali definiti $I = \int_0^1 e^x \mathrm{d}x$, $I_N = \int_0^1 \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \mathrm{d}x$, $N \in \mathbb{N}$.

Sia I_{CS} l'approssimazione di I ottenuta con il metodo di Cavalieri-Simpson composito nel caso di $M = 200$. Si utilizzi la function MATLAB `polyint` per il calcolo degli integrali definiti I_N. Trovare sperimentalmente il minimo valore $\tilde{N}$ per il parametro N per il quale si verifica: $E_N = |I_{CS} - I_N| < 10^{-6}$.

RISULTATI

$I_{CS} =$ $\qquad$ $\tilde{N} =$ $\qquad$ $E_{\tilde{N}} =$

3) Per la ricerca dell'unico punto fisso α della funzione $g(x) \equiv \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\cos x\right)$, ovvero della radice dell'equazione non lineare $f(x) \equiv x - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\cos x\right) = 0$, si implementi la seguente procedura:

3.1) trovare $\alpha_0 \approx \alpha$ utilizzando la function MATLAB `fzero` con `X0 = 0`;

3.2) dato $x_0^{[\text{pf}]} = 0$, localizzare α con il metodo iterativo di punto fisso $x_k^{[\text{pf}]} = g(x_{k-1}^{[\text{pf}]})$ e sia k_1 il numero di iterazioni necessarie affinchè $|x_k^{[\text{pf}]} - x_{k-1}^{[\text{pf}]}| < \varepsilon$. Calcolare $e_1 = |x_{k_1}^{[\text{pf}]} - \alpha_0|$;

3.3) approssimare α con il metodo di Newton utilizzando come valore di innesco $x_0^{[\text{New}]} = x_{k_1}^{[\text{pf}]}$. Sia k_2 il numero di iterazioni necessarie affinchè $|x_k^{[\text{New}]} - x_{k-1}^{[\text{New}]}| < \varepsilon^2$. Calcolare $e_2 = |x_{k_2}^{[\text{New}]} - \alpha_0|$;

Utilizzare $\varepsilon = 0.5,\ 0.05,\ 0.005$ e riportare i risultati nella tabella.

	k_1	e_1	k_2	e_2	$x_{k_2}^{[\text{New}]}$
$\varepsilon = 0.5$					
$\varepsilon = 0.05$					
$\varepsilon = 0.005$					