CALCOLO NUMERICO 1 (24 aprile 2015)
COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ N = M - A, \ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

dimostrare che il metodo iterativo: $M\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad k \geq 0$, converge alla soluzione del sistema lineare, con $\mathbf{x}^{(0)}$ generico vettore di $\mathbb{R}^3$.

1.1) Proporre un opportuno scambio di righe della matrice A affinchè il metodo di Jacobi sia applicabile e convergente. Detta A_p la matrice ottenuta dopo lo scambio, fornire una maggiorazione del numero di condizionamento $K_2(A_p)$.

2) Sia $x_0 \in (a, b)$, $h > 0$ tale che $(x_0 + h) \in (a, b)$, $(x_0 - h) \in (a, b)$. Data $f \in C^3[a, b]$ si approssimi il valore $f'(x_0)$ come segue,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Stimare l'errore assoluto di tale approssimazione ed applicare la stima trovata al caso:
$a = 1, b = 3, h = 0.01, \ f(x) = x + \ln(x + 2)$.

3) Dimostrare che la funzione

$$g(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) x + (1 - \lambda)x^3 + \frac{\lambda\alpha}{3x^2} + (\lambda - 1)\alpha, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

ammette come punto fisso $\sqrt[3]{\alpha}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Determinare per quale valore di λ il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, ha ordine di convergenza 2 e dimostrare che il metodo non può avere ordine superiore a 2.

4) Si consideri la funzione, $s : [0, 3] \to \mathbb{R}$,

$$S(x) = \begin{cases} ax^2 + b(x - 1)^3 & x \in [0, 1) \\ cx^2 + d & x \in [1, 2) \\ ex^2 + f(x - 2)^3 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

con a, b, c, d, e, f parametri reali. Per quali valori dei parametri S è una spline cubica?

4.1) Esistono dei valori dei parametri per cui S è una spline cubica naturale?

4.2) In quanti e quali dei nodi $\{0, 1, 2, 3\}$ è possibile in generale imporre una condizione di interpolazione per S?

5) Data la formula di quadratura gaussiana

$$\int_0^1 xf(x) \simeq A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1), \quad A_0, A_1 \in \mathbb{R}, x_0, x_1 \in [0, 1],$$

indicare il massimo grado di precisione possibile e descrivere il metodo di costruzione della formula per calcolare nodi e pesi, utilizzando opportuni polinomi ortogonali.