CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 24 aprile 2015

1) Dati la funzione $f(t) = \cos(t)\exp(t)$, i nodi $x_k = \frac{k\pi}{12}$, $k = 0, ..., 12$, e 401 punti equispaziati $\{z_i\}_{i=0}^{400}$ su $[0, \pi]$, calcolare, $\forall i = 0, ..., 400$ i valori:

1.1) $s_m(z_i)$, dove per $m = 1$ e $m = 3$, s_1 e s_3 sono rispettivamente le spline lineare e cubica interpolanti i dati $(x_k, f(x_k)))$, $k = 0, ..., 12$;

1.2) $p(z_i)$, con p polinomio di Lagrange di grado 12 interpolante i dati $(\eta_j, f(\eta_j))$, $j = 0, ..., 12$, dove gli η_j, $j = 0, ...12$ sono i nodi di Chebyshev su $[0, \pi]$.

Calcolare gli errori:

$$E_m = \sqrt{\sum_0^{400} |s_m(z_i) - f(z_i)|^2}, m = 1, 3, \;\; E_p = \sqrt{\sum_0^{400} |p(z_i) - f(z_i)|^2}.$$

<u>RISULTATI:</u> $E_1 =$ $\qquad$ $E_3 =$ $\qquad$ $E_p =$

2) Si consideri la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} C & 2I & I & O & O & O \\ 2I & C & O & I & O & O \\ I & O & C & 2I & I & O \\ O & I & 2I & C & O & I \\ O & O & I & O & C & 2I \\ O & O & O & I & 2I & C \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} h & -1 & 0 \\ -1 & h & -1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

dove O e I sono, rispettivamente, la matrice nulla e identità in $\mathbb{R}^{3\times3}$. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con $h = 10, 15, 20, 25, 30$ e $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{18,1}$ calcolato in modo tale che $x_i = 1$, $\forall i = 1, ..., 18$.

2.1) Si costruisca la matrice di iterazione B_h relativa al metodo di Jacobi e si riporti il valore del raggio spettrale $\rho(B_h)$ al variare di h.

2.2) Posto $x_i^{(0)} = 0, \forall i = 1, ..., 18$, stimare teoricamente il numero minimo di iterazioni K_h per ottenere $\frac{||\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}||_2}{||\mathbf{x}||_2} < 10^{-6}$. Eseguire poi il metodo di Jacobi con lo stesso $\mathbf{x}^{(0)}$ e lo stesso test d'arresto e riportare il numero di iterazioni N_h eseguite.

h	$\rho(B_h)$	K_h	N_h
10			
15			
20			
25			
30			

3) Dati $f(t) = \sin \frac{5}{4}t + \exp(\frac{1}{4}t)$ e il sistema non lineare

$$\begin{cases} y = f(x) \\ \\ x = f(y) \end{cases},$$

3.1) trovare graficamente un rettangolo $\Omega = [m_1, m_2] \times [n_1, n_2]$ $(m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N})$, contenente la soluzione (α, β) del sistema dato ed il punto di coordinate $(1, 2)$.

3.2) Implementare la seguente procedura iterativa:

assegnati i valori di innesco al primo passo $k = 1$, $x^{(1)} = 1$, $y^{(1)} = 2$:

$$\forall k \geq 1 : \quad \begin{cases} y^{(k+1)} = f(x^{(k)}) \\ \\ x^{(k+1)} = f(y^{(k+1)}) \end{cases}.$$

Sia K il numero di iterazioni necessarie affinchè:

$$\max\{|x^{(K)} - x^{(K-1)}|;\ |y^{(K)} - y^{(K-1)}|\} \leq 10^{-4}.$$

RISULTATI

$\Omega = [\qquad] \times [\qquad]$

$K =$

$\alpha \approx x^{(K)} =$

$\beta \approx y^{(K)} =$