CALCOLO NUMERICO 1 (24 aprile 2015)
COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = M - A, \ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

dimostrare che il metodo iterativo: $M\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad k \geq 0$, converge alla soluzione del sistema lineare, con $\mathbf{x}^{(0)}$ generico vettore di $\mathbb{R}^3$.

1.1) Proporre un opportuno scambio di righe della matrice A affinchè il metodo di Jacobi sia applicabile e convergente. Detta A_p la matrice ottenuta dopo lo scambio, fornire una maggiorazione del numero di condizionamento $K_2(A_p)$.

$$A = M - N \qquad N = M - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(M-N)x = f \qquad Mx = Nx + f \qquad x = \underbrace{M^{-1}N}_{B}x + M^{-1}N$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \|B\|_\infty = \frac{2}{3} < 1$$

$\Rightarrow \rho(B) < 1$

$\Rightarrow$ converge

$$A_p = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ matrice diagonalmente dominante $\Rightarrow$ m. d. Jacobi convergente

Teorema Gershgorin applicato alla matrice A_p

$$\begin{cases} |\lambda - 2| \leq 1 \\ |\lambda - 3| \leq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \leq \lambda \leq 3 \\ 1 \leq \lambda \leq 5 \end{cases}$$

A_p simmetrica
$\lambda > 0$ $\Rightarrow$ A d.pos

$$\max \lambda \leq 5 \qquad \min \lambda \leq 1 \qquad K_2 = \frac{\max \lambda}{\min \lambda} \leq 5$$

(oppure: calcolo degli autovalori $\det(A_p - \lambda I) = 0$ .....)

$$K_2(A_p) \leq 5$$

2) Sia $x_0 \in (a,b)$, $h > 0$ tale che $(x_0 + h) \in (a,b)$, $(x_0 - h) \in (a,b)$. Data $f \in C^3[a,b]$ si approssimi il valore $f'(x_0)$ come segue,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

Stimare l'errore assoluto di tale approssimazione ed applicare la stima trovata al caso: $a = 1, b = 3, h = 0.01,\ f(x) = x + \ln(x+2)$.

M1

24-4-15

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(\bar{x}_0)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(\bar{\bar{x}}_0)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h f'(x_0) + \frac{h^3}{6}\left[f'''(\bar{x}_0) + f'''(\bar{\bar{x}}_0)\right]$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = \frac{h^3}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{2}h} \underbrace{\left[\frac{f'''(\bar{x}_0)+f'''(\bar{\bar{x}}_0)}{2}\right]}_{f'''(\eta)} \cdot \cancel{2}$$

$$\Bigg|\overbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0)}^{E}\Bigg| \leq \frac{h^2}{6} \max_{a \leq \eta \leq b} |f'''(\eta)|$$

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{t+2}\ ; \quad f''(t) = -\frac{1}{(t+2)^2} \quad f'''(t) = \frac{2}{(t+2)^3}$$

Caso particolare: $a=1 \quad b=3 \quad h=0.01$

$$E \leq \frac{1}{\cancel{6}3} 10^{-4} \cdot \frac{\cancel{2}}{3^3} = \frac{1}{30^4}$$

3) Dimostrare che la funzione

$$g(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) x + (1-\lambda)x^3 + \frac{\lambda\alpha}{3x^2} + (\lambda - 1)\alpha,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

ammette come punto fisso $\sqrt[3]{\alpha}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Determinare per quale valore di λ il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, ha ordine di convergenza 2 e dimostrare che il metodo non può avere ordine superiore a 2.

$$g(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) x + (1-\lambda) x^3 + \frac{\lambda\alpha}{3x^2} + (\lambda-1)\alpha$$

MI

24-4-15

Trovo il punto fisso $\quad x = g(x)$

$$\cancel{x} = \cancel{x} - \frac{\lambda}{3}x + (1-\lambda)x^3 + \frac{\lambda\alpha}{3x^2} + (\lambda-1)\alpha$$

$$0 = -\frac{\lambda}{3}x + x^3 - \lambda x^3 + \frac{\lambda\alpha}{3x^2} + \alpha\lambda - \alpha$$

$$0 = (x^3 - \alpha) - \lambda(x^3 - \alpha) - \frac{\lambda}{3x^2}(x^3 - \alpha)$$

$$(x^3 - \alpha)\left(1 - \lambda - \frac{\lambda}{3x^2}\right) = 0 \qquad x = \sqrt[3]{\alpha} \quad \forall \lambda$$

- $$g'(x) = 1 - \frac{\lambda}{3} + 3x^2(1-\lambda) - \frac{2\lambda\alpha}{3x^3}$$

$$g'(\sqrt[3]{\alpha}) = 1 - \frac{\lambda}{3} + 3\sqrt[3]{\alpha^2} - 3\sqrt[3]{\alpha^2}\lambda - \frac{2\lambda\cancel{\alpha}}{3\cancel{\alpha}} =$$

$$= 1 - \lambda + 3\sqrt[3]{\alpha^2}(1-\lambda) = (1-\lambda)\left(1 + 3\sqrt[3]{\alpha^2}\right) = 0 \qquad \lambda = 1$$

$$\Rightarrow \underset{[\lambda=1]}{g(x)} = \frac{2}{3}x + \frac{\alpha}{3x^2} \qquad g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2\alpha}{3x^3}$$

$$g''(x) = \frac{2\alpha}{x^4} \neq 0$$

Il metodo non può avere ordine > 2

4) Si consideri la funzione, $S:[0,3]\to\mathbb{R}$,

$$S(x)=\begin{cases} ax^2+b(x-1)^3 & x\in[0,1)\\ cx^2+d & x\in[1,2)\\ ex^2+f(x-2)^3 & x\in[2,3]\end{cases}$$

H1

24/4/15

con a,b,c,d,e,f parametri reali. Per quali valori dei parametri S è una spline cubica?

4.1) Esistono dei valori dei parametri per cui S è una spline cubica naturale?

4.2) In quanti e quali dei nodi $\{0,1,2,3\}$ è possibile in generale imporre una condizione di interpolazione per S?

$$s(x)=\begin{cases} ax^2+b(x-1)^3 & x\in[0,1)\\ cx^2+d & x\in[1,2)\\ ex^2+f(x-2)^3 & x\in[2,3]\end{cases} \quad s'(x)=\begin{cases}2ax+3b(x-1)^2\\ 2cx\\ 2ex+3f(x-2)^2\end{cases} \quad s''(x)=\begin{cases}2a+6b(x-1)\\ 2c\\ 2e+6f(x-2)\end{cases}$$

- $s(1^-)=a \quad s(1^+)=c+d \quad \Rightarrow \quad a=c+d$
- $s(2^-)=4c+d \quad s(2^+)=4e \quad \Rightarrow \quad 4c+d=4e$
- $s'(1^-)=2a \quad s'(1^+)=2c \quad \Rightarrow \quad a=c$
- $s'(2^-)=4c \quad s'(2^+)=4e \quad \Rightarrow \quad c=e$
- $s''(1^-)=2a \quad s''(1^+)=2c \quad \Rightarrow \quad a=c$
- $s''(2^-)=2c \quad s''(2^+)=2e \quad \Rightarrow \quad c=e$

$\Big\}\ a=c=e$

Nella 1^a $d=0$
Nella 2^a $d=0$

$\Rightarrow a=c=e\ ;\quad \forall f,b$

1) Spline naturale $\quad s''(0)=2a-6b=0 \quad a=3b$
$\quad s''(3)=2e+6f=0 \quad e=-3f$

Ma $a=e \Rightarrow \quad b=-f=\frac{a}{3}=\frac{e}{3} \quad$ 1 d.o.f.

2) $\begin{cases} ax^2+b(x-1)^3\\ ax^2\\ ax^2+f(x-2)^3\end{cases}$

Interp in $x=0 \quad -b=y_0$
" " $x=1 \quad a=y_1$
" " $x=2 \quad 4a=y_2$
" " $x=3 \quad 9a+f=y_3$

$\Big\}$ Incompatibili $\forall y_1, y_2$

$\Rightarrow$ Si può imporre la c. interpolazione in $\{0, 1 \text{ o } 2, 3\}$