

CALCOLO NUMERICO 1 (22 Aprile 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

- 1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{(1 - \sqrt{x})},$$

e determinare per quali valori il problema del calcolo di f è ben condizionato (nel senso di $|K_f| \leq 1$).

- 2) Dati i seguenti punti $(x_k, \text{sign}(x_k))$, dove $f(x) = \text{sign}(x)$ è la funzione segno,

$$(-3, -1), (-1, -1), (1, 1),$$

trovare il polinomio interpolatore. Stimare l'errore commesso per $x \in [-3, -1]$.

- 3) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3.$$

Dopo aver trovato i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice risulta non singolare, determinare per quali valori di $\alpha > 0$, e solo per quelli, i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono e stabilire la relazione tra le rispettive velocità asintotiche di convergenza.

- 4) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \alpha f(-h) + \beta f(2h),$$

Determinare $\alpha, \beta, h \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula?

- 5) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

di cui si voglia calcolare un autovalore attraverso il metodo di bisezione applicato al polinomio caratteristico. Determinare un intervallo iniziale per tale metodo e giustificarne la scelta.