Cognome: ______________ Nome: ______________ Matricola: __________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 21 aprile 2016

1) Data $f(x) = 2x - 4$, $x \in [-5, 5]$, considerare:

a) 11 nodi equispaziati: $x_1 = -5 < x_2 < \ldots x_{11} = 5$, e i corrispondenti valori $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, 11$;

b) 101 nodi equispaziati: $z_1 = -5 < z_2 < \ldots z_{101} = 5$ e i corrispondenti valori $Y_k = f(z_k)$, $k = 1, \ldots, 101$.

Per i tre valori diversi di $\sigma = 0.1,\ 0.01,\ 0.001$ calcolare i valori perturbati degli y_i mediante la formula:

$$\widetilde{y}_i = y_i + (-1)^i\ \frac{\sigma}{i},\ i = 1, \ldots, 11.$$

Siano:

- p il polinomio di Lagrange di grado 10 che interpola i dati $(x_i, \widetilde{y}_i),\ i = 1, \ldots, 11$;
- s la spline lineare che interpola i dati $(x_i, \widetilde{y}_i),\ i = 1, \ldots, 11$;
- r il polinomio di grado 1 dei minimi quadrati discreti che approssima i dati $(x_i, \widetilde{y}_i),\ i = 1, \ldots, 11$.

Calcolare:

$$E_p = \sqrt{\sum_{k=1}^{101}[Y_k - p(z_k)]^2},\ E_s = \sqrt{\sum_{k=1}^{101}[Y_k - s(z_k)]^2},\ E_r = \sqrt{\sum_{k=1}^{101}[Y_k - r(z_k)]^2}$$

σ	E_p	E_s	E_r
0.1			
0.01			
0.001			

2) Data l'equazione non lineare $f(x) \equiv x^6 - \frac{1}{2} = 0$ si vuole approssimare la radice negativa $\alpha = -\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$ con il metodo di Newton, utilizzando $x_0 = -1$ e test d'arresto: $|x_k - \alpha| \approx |x_k - x_{k+1}| < 10^{-8}$. Sia K il numero di iterazioni eseguite, x_K la K-esima iterata del metodo di Newton, ed $e_K = |x_K - \alpha|$ il corrispondente errore commesso calcolato utilizzando la soluzione esatta α.

Successivamente si consideri il metodo iterativo di punto fisso

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad g(x) = x + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{12},$$

con $x_0 = -1$ e test d'arresto: $|x_n - \alpha| \approx |x_n - x_K| < 10^{-8}$, dove x_K è la K-esima iterata del metodo di Newton. Sia N il numero di iterazioni eseguite per soddisfare il test d'arresto, x_N la N-esima iterata del metodo di punto fisso, ed $e_N = |x_N - \alpha|$ il corrispondente errore commesso calcolato utilizzando la soluzione esatta α.

Newton	$K =$	$x_K =$	$e_K =$
punto fisso	$N =$	$x_N =$	$e_N =$

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{10,1}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 1 & 2 & 3 & ... & 9 \\ 1 & 100 & 1 & 2 & ... & 8 \\ 2 & 1 & 100 & 1 & ... & 7 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 9 & 8 & 7 & ... & 1 & 100 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{10} a_{ij},\ i = 1, ..., 10,$$

si approssimi la soluzione $\mathbf{x}$ con il metodo di Jacobi utilizzando $\mathbf{x}^{(0)} = [\frac{1}{10}\ \frac{2}{10}\ \frac{3}{10} ... 1]^T$ e test d'arresto $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\|_2 < 10^{-8}$. Sia K il numero di iterazioni eseguite.

Si vuole confrontare l'errore calcolato all'iterata K-esima $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(K)}\|_2$, ottenuto utilizzando il vettore $\mathbf{x}$ della soluzione esatta, con la maggiorazione

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(K)}\|_2 \leq \underbrace{\frac{\|B\|_2}{1 - \|B\|_2} \|\mathbf{x}^{(K-1)} - \mathbf{x}^{(K)}\|_2}_{M_K},$$

dove B è la matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

RISULTATI

$K =$ $\|B\|_2$ $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(K)}\|_2$ $M_K =$