CALCOLO NUMERICO 1 (22 Aprile 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{(1-\sqrt{x})},$$

e determinare per quali valori il problema del calcolo di f è ben condizionato (nel senso di $|K_f| \le 1$).

C.E. $\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$ $\quad 0 < x < 1$

$K_f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$K_f(x) = \left| \frac{\frac{x}{4\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \right| = \left| \frac{\sqrt{x}}{4\underbrace{(1-\sqrt{x})}_{>0}} \right| \le 1$$

$$\sqrt{x} \le 4 - 4\sqrt{x}$$

$$5\sqrt{x} \le 4 \qquad x \le \frac{16}{25} \qquad x \in \left(0, \frac{16}{25}\right)$$

MI

22-4-16

2) Dati i seguenti punti $(x_k, sign(x_k))$, dove $f(x) = sign(x)$ è la funzione segno,

$$(-3,-1),\ (-1,-1),\ (1,1),$$

trovare il polinomio interpolatore. Stimare l'errore commesso per $x \in [-3,-1]$.

x	y		
-3	$-1 = a_0$		
		$0 = a_1$	
-1	-1		$\frac{1}{4} = a_2$
		1	
1	1		

$$p_2(x) = -1 + \frac{1}{4}(x+3)(x+1) =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}$$

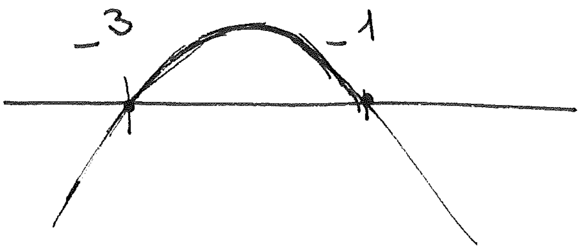
Non è possibile stimare l'errore mediante il risultato del teorema per cui $f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$ perché $f \notin C^0[-3,-1]$

$\Rightarrow$ Calcolo dell'errore $x \in [-3,-1]$ $(f(x) = -1)$

$$f(x) - p_2(x) = -1 - \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{3}{4} =$$

$$-\left(\frac{x^2}{4} + x + \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 3)$$

$V\left(-2; \frac{1}{4}\right)$



$$\max_{x \in [-3,-1]} |f(x) - p_2(x)| = \frac{1}{4}$$

3) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3.$$

MI 22/4/2016

Dopo aver trovato i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice risulta non singolare, determinare per quali valori di $\alpha > 0$, e solo per quelli, i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono e stabilire la relazione tra le rispettive velocità asintotiche di convergenza.

Non singolare:

$$\det A = \alpha\left(4\alpha^2 - 2\alpha^2\right) - 2\alpha^2 = 2\alpha^3 - 2\alpha^2 = 2\alpha^2(\alpha - 1) \neq 0$$

$\alpha \neq 0$

$\alpha \neq 1$

- Jacobi $\det(\lambda D + L + U) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} \alpha\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 4\lambda & 2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2\lambda \end{bmatrix} = \alpha\lambda\left(4\alpha^2\lambda^2 - 2\alpha^2\right) - 2\alpha^2\lambda = 0$$

$$4\alpha^3\lambda^3 - 2\alpha^3\lambda - 2\alpha^2\lambda = 0$$

$$2\alpha^2\lambda\left(2\alpha\lambda^2 - \alpha - 1\right) = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda^2 = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha}$ $\quad \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha+1}{2\alpha}}$

$(\alpha > 0)$

$$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}$$

- Gauss-Seidel

Matrice tridiagonale $\quad \rho(B_{GS}) = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha}$

Condizioni di convergenza $\quad \dfrac{\alpha+1}{2\alpha} < 1 \quad \alpha > 1$

$$R(B_J) = \frac{1}{2} R(B_{GS})$$

4) Si consideri la formula di quadratura

M1

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \alpha f(-h) + \beta f(2h),$$

22/4/2016

Determinare $\alpha,\ \beta, h \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula?

$r=0$ $f=1$ $\quad \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \qquad \alpha+\beta=2$

$r=1$ $f=x$ $\quad \int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \qquad -\alpha h + 2\beta h = 0 \qquad \alpha = 2\beta \qquad 3\beta = 2$

$\beta = \frac{2}{3}$

$\alpha = \frac{4}{3}$

$r=2$ $\quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \qquad \alpha h^2 + 4\beta h^2 = \frac{2}{3}$

$\frac{4}{3}h^2 + \frac{8}{3}h^2 = \frac{2}{3} \qquad 12h^2 = 2 \qquad h = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \frac{4}{3} f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)}$$

G.P. $r=3$

$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \qquad \frac{4}{3}\left(+\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{6\sqrt{6}} =$

$\frac{12}{18\sqrt{6}} \neq 0$

$\Rightarrow$ GP. è 2

5) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

di cui si voglia calcolare un autovalore attraverso il metodo di bisezione applicato al polinomio caratteristico. Determinare un intervallo iniziale per tale metodo e giustificarne la scelta.

MI 22-4-16

$\det(A-\lambda I)=0$ polinomio caratteristico

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-1\right]+1(-1)(2-\lambda)=0$$

$$(2-\lambda)\left[4-4\lambda+\lambda^2-1-1\right]=0$$

$$(2-\lambda)\underbrace{[\lambda^2-4\lambda+2]}_{q(\lambda)}=0$$

$q(0)=2>0$ $\quad \exists\, \lambda \in (0,1)$

$q(1)=-1<0$ $\quad$ monotona

$q'(\lambda)=2\lambda-4>0 \quad \lambda>2$