CALCOLO NUMERICO 1 (26 aprile 2017)

1) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione reale tale che f sia derivabile per $x > 0$. Calcolare il numero di condizionamento $K_g(x)$ della funzione $g(x) = e^{f(x)}$ nei due casi particolari $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \sqrt{x}$. Stabilire se per $x \in (0, 10)$ il calcolo della funzione g è ben condizionato, nel senso che $K_g(x) < 10$.

2) Per determinare gli zeri della funzione $f(x) = x^3 - 2x$ si consideri il metodo iterativo di punto fisso $x_{n+1} = g(x_n)$, dove

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{4},$$

e se ne studi la convergenza e l' ordine al variare di $x_0 \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

3) Data $f(x) = \cos(\pi x)$, sia $p_n(x)$ il polinomio di grado $n \geq 1$ che interpola f nei nodi $x_i = -1 + 2i/n,\ i = 0, ..., n$. Verificare se $\forall x \in [-1, 1]$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - p_n(x)] = 0.$$

4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha > 0.$$

4.1) Calcolare A^{-1}.

4.2) Calcolare $K_1(A)$ e $K_\infty(A)$ e rappresentarle graficamente in funzione di α.

5) Data $f \in C^1([0, b])$, $b > 0$ stabilire se è possibile determinare i coefficienti $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ e α in funzione di b, in modo tale che la formula di quadratura:

$$\int_0^b f(x)\mathrm{d}x \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\alpha) + \omega_3 f'(0),$$

abbia grado di precisione maggiore o uguale a 3.