Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 27 aprile 2017

1) Sia

$$f(x) = \mathrm{e}^{|x|}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Siano $P^e_{10}(x)$ e $P^e_{20}(x)$ i polinomi di grado $n = 10$ e $n = 20$, rispettivamente, che interpolano la funzione $f(x)$ su nodi equispaziati dell'intervallo $[-1, 1]$.

Siano inoltre $P^c_{10}(x)$ e $P^c_{20}(x)$ i polinomi di grado $n = 10$ e $n = 20$, rispettivamente, che interpolano la funzione $f(x)$ su nodi di Chebyshev dell'intervallo $[-1, 1]$.

Sia poi $\mathbf{z} = \{z_j\}_{j=1}^N$ il vettore ottenuto con il comando Matlab `z=-1:0.01:1`.

Si calcolino e si riportino nella tabella sottostante gli errori

$$\begin{array}{ll} ||f - P^e_{10}||_\infty, & ||f - P^e_{20}||_\infty \\ ||f - P^c_{10}||_\infty, & ||f - P^c_{20}||_\infty \end{array},$$

avendo posto, per ogni funzione g definita sull'intervallo [-1,1]:

$$||g||_\infty = \max_{1 \le j \le N} |g(z_j)|.$$

Si commentino i risultati ottenuti.

nodi	$n = 10$	$n = 20$
equispaziati		
Chebyshev		

Commento:

2) Per ciascun valore di $n = 10, 20, 30, 40$ si consideri il vettore riga

$$\mathbf{x} = [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1] \in \mathbb{R}^{1,n}$$

e il sistema lineare $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ con

$$A = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \frac{n}{2}I, \quad \mathbf{b} = [1\ 1\ \ldots 1\ 1]^T,$$

dove I è la matrice Identità di ordine n.

Dato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ di componenti $x_i^{(0)} = \sin(i * n),\ i = 1, ..., n$, si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha\left(A\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{b}\right),\ \alpha = \frac{2}{\lambda_M + \lambda_m},\ \text{con } \lambda_M = \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(A),\ \lambda_m = \min_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(A),$$

dove $\lambda_i(A)$, $i = 1, ..., n$ sono gli autovalori della matrice A.

Calcolare il raggio spettrale ρ della matrice di iterazione $B = (I - \alpha A)$ e determinare il numero di iterazioni K necessarie affinchè $\|\mathbf{b} - A\mathbf{u}^{(K)}\|_2 < 10^{-8}$.

n	α	ρ	K
10			
20			
30			
40			

3) Si consideri l'integrale definito

$$\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{2}} (x^3 - x)e^{|1-x^2|}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{e}}{4}.$$

Sia $I_T(m)$ l'approssimazione di I ottenuta applicando il metodo dei trapezi composito con m sottointervalli di uguale ampiezza, per $m = 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4, ...$

Trovare sperimentalmente il minimo valore M per il parametro m per il quale si verifica:

$$E_M = \left| I_T(M) - I_T(\frac{M}{2}) \right| < 10^{-4}.$$

RISULTATI

$M =$ $\qquad$ $I_T(M) =$ $\qquad$ $E_M =$