CALCOLO NUMERICO 1 (26 aprile 2017)

M1 Mate

26-4-17

1) Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione reale tale che f sia derivabile per $x > 0$. Calcolare il numero di condizionamento $K_g(x)$ della funzione $g(x) = e^{f(x)}$ nei due casi particolari $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \sqrt{x}$. Stabilire se per $x \in (0,10)$ il calcolo della funzione g è ben condizionato, nel senso che $K_g(x) < 10$.

$$g(x) = e^{f(x)}$$

$$K_g(x) = \left|\frac{x\, g'(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{x\, e^{f(x)} f'(x)}{e^{f(x)}}\right| = |x f'(x)|$$

1) $f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$$|x\cos x| \leq |x| < 10 \qquad (\text{hp } x \in (0,10))$$

2) $f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x \in (0,10)$

$$K_g(x) = \left|x \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}}{2}\right| = \frac{\sqrt{x}}{2} < \frac{\sqrt{10}}{2} < 10$$

2) Per determinare gli zeri della funzione $f(x) = x^3 - 2x$ si consideri il metodo iterativo di punto fisso $x_{n+1} = g(x_n)$, dove

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{4},$$

e se ne studi la convergenza e l' ordine al variare di $x_0 \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

M1 Mate

26-4-2017

$f(x) = x^3 - 2x = 0 \quad x(x^2-2) = 0 \quad x = 0 \lor x = \pm\sqrt{2}$

$g(x) = x - \frac{x^3-2x}{4} = \frac{-x^3+6x}{4} \quad g'(x) = -\frac{3x^2+6}{4}$

funzione dispari

CS per convergenza

$g'(0) = \frac{3}{2} > 1$ non converge

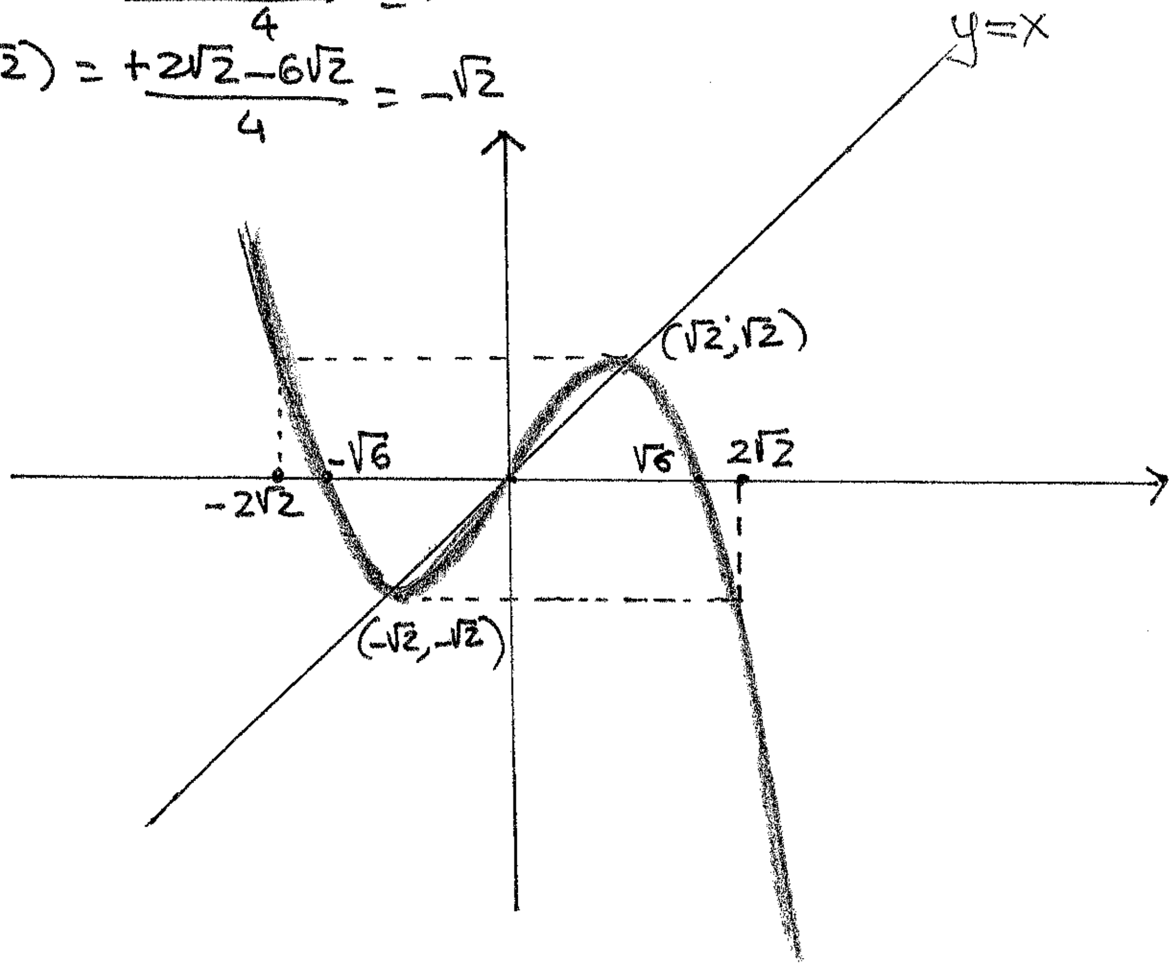
$g'(\pm\sqrt{2}) = 0$ convergenza con ordine almeno 2

$g''(x) = -\frac{6}{4}x \quad g''(\pm\sqrt{2}) \neq 0 \implies$ ORDINE 2

$g(x) = 0 \quad x = 0 \lor x = \pm\sqrt{6}$

$g(\sqrt{2}) = \frac{-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

$g(-\sqrt{2}) = \frac{+2\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{2}$



Studio della convergenza al variare di

$x_0 \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

- $x_0 = -2\sqrt{2}$ $\quad x_1 = \dfrac{-(-2\sqrt{2})^3 + 6(-2\sqrt{2})}{4} = \dfrac{16\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

  $x_2 = x_3 \dots = \sqrt{2}$

  converge al p.f. $\sqrt{2}$ in 1 iterazione

- $-2\sqrt{2} < x_0 < -\sqrt{6}$ $\quad 0 < x_1 < \sqrt{2}$

  succ. mon. cresc. $\nearrow \sqrt{2}$ $\quad 2°$ ordine

- $x_0 = -\sqrt{6}$ $\quad x_1 = 0$

- $-\sqrt{6} < x_0 < -\sqrt{2}$ $\quad -\sqrt{2} < x_1 < 0$

  succ. mon. decr. $\searrow -\sqrt{2}$ $\quad 2°$ ordine

- $x_0 = -\sqrt{2}$ $\quad x_n = -\sqrt{2} \ \forall n$

- $-\sqrt{2} < x_0 < 0$ $\quad$ succ. mon. decr $\searrow -\sqrt{2}$ $\quad 2°$ ord.

- $x_0 = 0$ $\quad x_n = 0 \ \forall n$

$0 < x_0 \leq \sqrt{2}$ si ricovano (per simmetria - fz dispari) dai casi precedenti.

3) Data $f(x) = \cos(\pi x)$, sia $p_n(x)$ il polinomio di grado $n \geq 1$ che interpola f nei nodi $x_i = -1 + 2i/n,\ i = 0, ..., n$. Verificare se $\forall x \in [-1, 1]$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - p_n(x)] = 0.$$

MI MATE

26-4-17

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t_x) \qquad -1 < t_x < 1$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$\underbrace{|f(x) - p_n(x)|}_{E(x)} = \frac{1}{(n+1)!} |(x - x_0) \dots (x - x_n)| \, |f^{(n+1)}(t_x)|$$

$$|(x - x_0) \dots (x - x_n)| = \underset{2}{|x - x_0|} \cdot \underset{2}{|x - x_1|} \cdot \dots \underset{2}{|x - x_n|} \leq = 2^{n+1}$$

$$f(t) = \cos \pi t$$

$$f'(t) = -\pi \operatorname{sen} \pi t$$

$$f''(t) = -\pi^2 \cos \pi t$$

$$\vdots$$

$$f^{(n+1)}(t) < \begin{matrix} \pm(\operatorname{sen} \pi t)\, \pi^{(n+1)} \\ \\ \pm(\cos \pi t)\, \pi^{(n+1)} \end{matrix}$$

$n+1$ dispari
n pari

$n+1$ pari
n dispari

$$|f^{(n+1)}(t_x)| \leq \pi^{n+1}$$

$$|E(x)| \leq \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

MI Mate

26-4-17

4.1) Calcolare A^{-1}.

4.2) Calcolare $K_1(A)$ e $K_\infty(A)$ e rappresentarle graficamente in funzione di α.

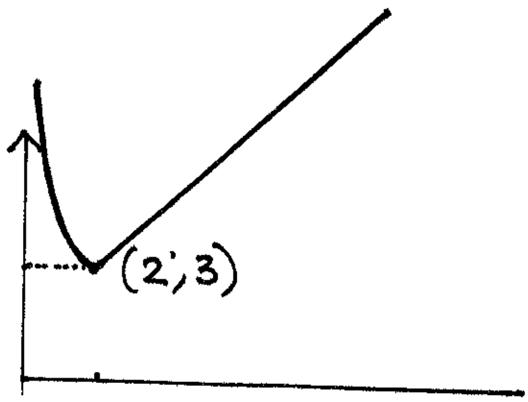
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & +\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

Norma 1

$$\|A\|_1 = \max\{2, \alpha\} = \begin{cases} 2 & 0 < \alpha < 2 \\ \alpha & \alpha \geq 2 \end{cases}$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max\left\{1, 1 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right\} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$K_1(A) = \begin{cases} 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 2 + \frac{2}{\alpha} & 0 < \alpha < 2 \\ \alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + 1 & \alpha \geq 2 \end{cases}$$



Norma ∞

$$\|A\|_\infty = \max\{1, 1 + \alpha\} = 1 + \alpha$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{1, \frac{2}{\alpha}\right\} = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{2}{\alpha} < 1, \ \alpha > 2 \\ \frac{2}{\alpha} & \text{se } \frac{2}{\alpha} \geq 1, \ 0 < \alpha \leq 2 \end{cases}$$

$$K_\infty(A) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha}(1 + \alpha) = 2 + \frac{2}{\alpha} & 0 < \alpha \leq 2 \\ 1 + \alpha & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

$$K_\infty(A) = K_1(A)$$

5) Data $f \in C^1([0,b])$, $b>0$ stabilire se è possibile determinare i coefficienti ω_1, ω_2, ω_3 e α in funzione di b, in modo tale che la formula di quadratura:

$$\int_0^b f(x)\,dx \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\alpha) + \omega_3 f'(0),$$

abbia grado di precisione maggiore o uguale a 3.

M1 Mate

26-4-17

$r=0$ $f(x)=1$ $f'(x)=0$

$\int_0^b dx = b$ $\omega_1+\omega_2=b$

• $r=1$ $f(x)=x$ $f'(x)=1$

$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$ $\omega_1\cdot 0+\omega_2\cdot\alpha+\omega_3 = \frac{b^2}{2}$

$\omega_2\alpha+\omega_3=\frac{b^2}{2}$

• $r=2$ $f(x)=x^2$ $f'(x)=2x$

$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$ $\omega_1\cdot 0^2+\omega_2\cdot\alpha^2+\omega_3\cdot 2\cdot 0 = \frac{b^3}{3}$

$\omega_2\alpha^2=\frac{b^3}{3}$

• $r=3$ $f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2$

$\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4}$ $\omega_1\cdot 0^3+\omega_2\alpha^3+\omega_3\cdot 3\cdot 0^2=\frac{b^4}{4}$

$\omega_2\alpha^3=\frac{b^4}{4}$

$$\begin{cases} \omega_1+\omega_2=b \\ \omega_2\alpha+\omega_3=\frac{b^2}{2} \\ \omega_2\alpha^2=\frac{b^3}{3} \\ \omega_2\alpha^3=\frac{b^4}{4} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \alpha=\frac{\frac{b^4}{4}}{\frac{b^3}{3}}=\frac{3}{4}b$$

$\omega_2\neq 0$

$\alpha\neq 0$

essendo $b>0$

Nella 3^a: $\omega_2 \cdot \frac{9}{16} b^2 = \frac{b^2}{3}$ $\qquad \omega_2 = \frac{16}{9 b^2} \cdot \frac{b^2}{3} = \frac{16}{27} b$

Nella 2^a:

$$\frac{16}{27} b \cdot \frac{3}{4} b + \omega_3 = \frac{b^2}{2}$$

$(\omega_2 \cdot \alpha)$

$$\omega_3 = \frac{b^2}{2} - \frac{4}{9} b^2 = \frac{9-8}{18} b^2 = \frac{1}{18} b^2$$

Nella 1^a $\qquad \omega_1 = b - \omega_2 = b - \frac{16}{27} b = \frac{11}{27} b$